Dualità di Stone-Gelfand per i gruppi

Marco Abbadini* [1] Vincenzo Marra [1] Luca Spada [2]

*autore del poster [1]Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Milano [2]Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Salerno

Background

Definizione

Un *gruppo Abeliano reticolare unitale* (o *ℓ-gruppo unitale*, in breve) $(G, +, \leqslant, 1)$ è un gruppo Abeliano G, dotato di un ordine parziale $\leqslant$ reticolare (cioè ogni coppia di elementi ammette sup e inf), con ordine parziale invariante per traslazione, cioè

$$\forall x, y, t \in G \;\; x \leqslant y \Rightarrow x + t \leqslant y + t,$$

e dotato di un elemento 1 che sia un'unità d'ordine forte, cioè

$$\forall x \in G \;\; \exists n \in \mathbb{N} : -n1 \leqslant x \leqslant n1.$$

Esempi

1. Dato un insieme X, l'insieme delle funzioni $f\colon X \to \mathbb{R}$ *limitate* è un ℓ-gruppo unitale, dove la somma e l'ordine sono pointwise, e 1 è la funzione costante 1.
2. Dato uno spazio compatto di Hausdorff X, l'insieme
$$\mathrm{C}(X) \coloneqq \{f\colon X \to \mathbb{R} \mid f \text{ è continua}\}$$
è un ℓ-gruppo unitale, dove la somma e l'ordine sono pointwise, e 1 è la funzione costante 1.

Ogni ℓ-gruppo unitale G si immerge in $\mathrm{C}(X)$, per qualche X compatto di Hausdorff, a patto che G soddisfi una certa proprietà di 'radicale nullo', come segue.
Un *ideale* I di un ℓ-gruppo unitale è un sottogruppo convesso (cioè $a \leqslant x \leqslant b, a, b \in I \Rightarrow x \in I$), chiuso per sup e inf binari. Gli ideali sono quei sottoinsiemi su cui ha senso quozientare: G/I è definito come il quoziente rispetto alla relazione di equivalenza $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in I$. G/I è un ℓ-gruppo unitale in modo canonico.

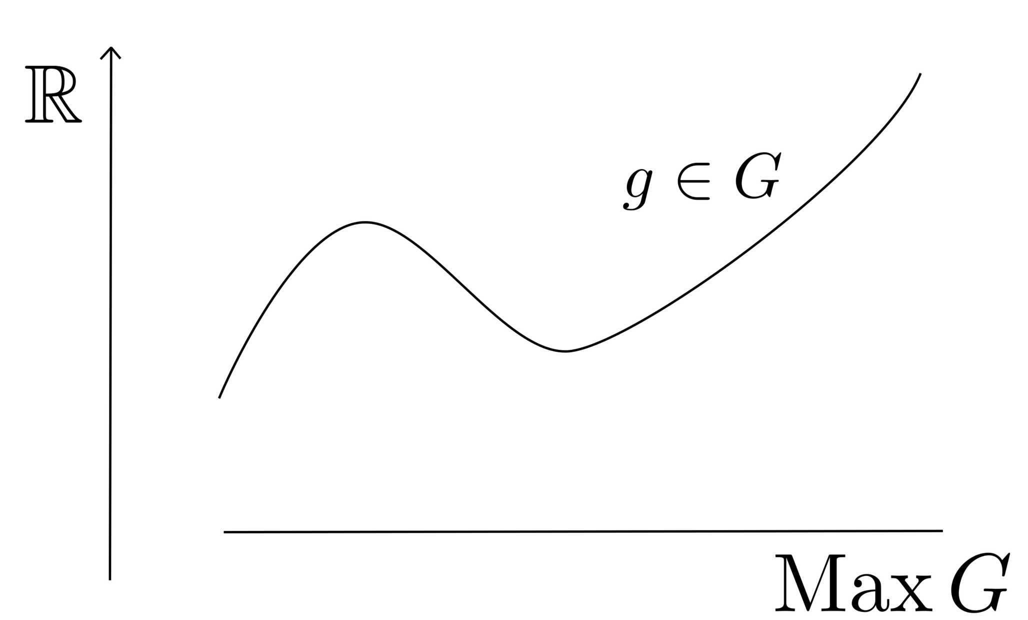
Definizione

Lo *spettro massimale* di un ℓ-gruppo unitale G, denotato con $\operatorname{Max} G$, è l'insieme degli ideali massimali di G. $\operatorname{Max} G$ può essere topologizzato alla Zariski: una base di chiusi è data da

$$V(I) \coloneqq \{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} G \mid \mathfrak{m} \supseteq I\}, \quad I \text{ ideale.}$$

$\operatorname{Max} G$ è un compatto di Hausdorff.
Se G ha radicale (=intersezione degli ideali massimali) banale, si ha un'inclusione canonica

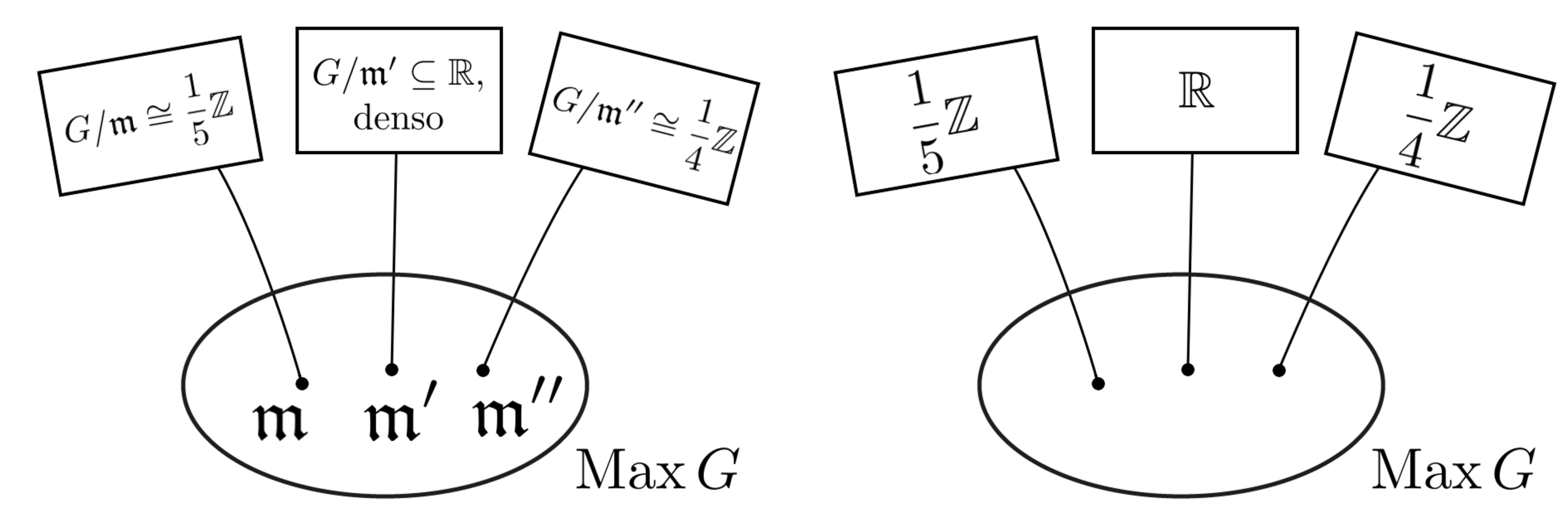
$$G \hookrightarrow \mathrm{C}(\operatorname{Max} G).$$



Il problema

Si può aggiungere struttura a $\operatorname{Max} G$, che rende più esplicita l'inclusione $G \hookrightarrow \mathrm{C}(\operatorname{Max} G)$.
Per ogni ℓ-gruppo unitale G, per ogni $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} G$, si hanno le seguenti alternative

$$G/\mathfrak{m} \cong \begin{cases} \frac{1}{n}\mathbb{Z}, & \text{per qualche } n \in \mathbb{N}_{>0} \ (\mathfrak{m} \text{ si dice } \textit{discreto}), \text{ oppure} \\ H \subseteq \mathbb{R} & \text{sottogruppo denso contenente } 1 \ (\mathfrak{m} \text{ si dice } \textit{indiscreto}). \end{cases}$$



Ad ogni $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} G$ associamo un'etichetta $L_\mathfrak{m}$ che denota la chiusura topologica di $G/\mathfrak{m}$, visto come sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Se G ha radicale nullo, l'inclusione $G \hookrightarrow \mathrm{C}(\operatorname{Max} G)$ restringe a

$$G \hookrightarrow \{f \in \mathrm{C}(\operatorname{Max} G) \mid \text{per ogni } \mathfrak{m} \in \operatorname{Max} G \text{ si ha } f(\mathfrak{m}) \in L_\mathfrak{m}\}.$$

Il problema

Come possono distribuirsi le etichette sullo spazio topologico $\operatorname{Max} G$?

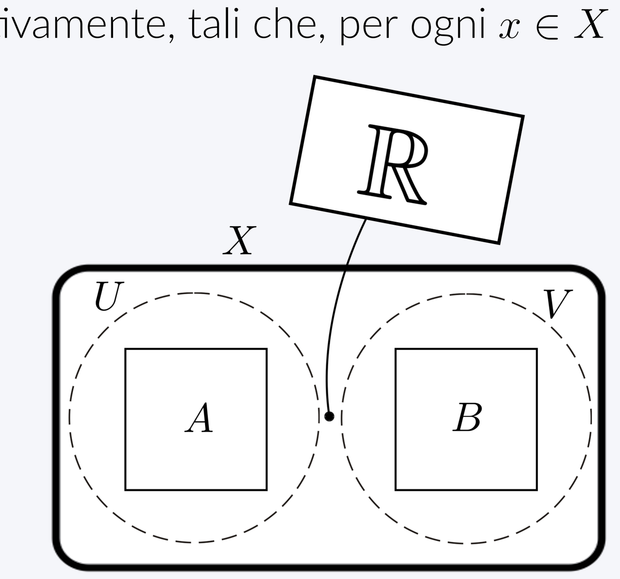
In altre parole, quali sono gli 'spazi etichettati' $(X, (L_x)_{x \in X})$ (dove X è uno spazio topologico, e, per ogni $x \in X$, L_x è un sottogruppo chiuso di $\mathbb{R}$ contenente 1, cioè è $\frac{1}{n}\mathbb{Z}$ per qualche $n \in \mathbb{N}_{>0}$, oppure è $\mathbb{R}$) che sono il Max di un ℓ-gruppo unitale?

La soluzione

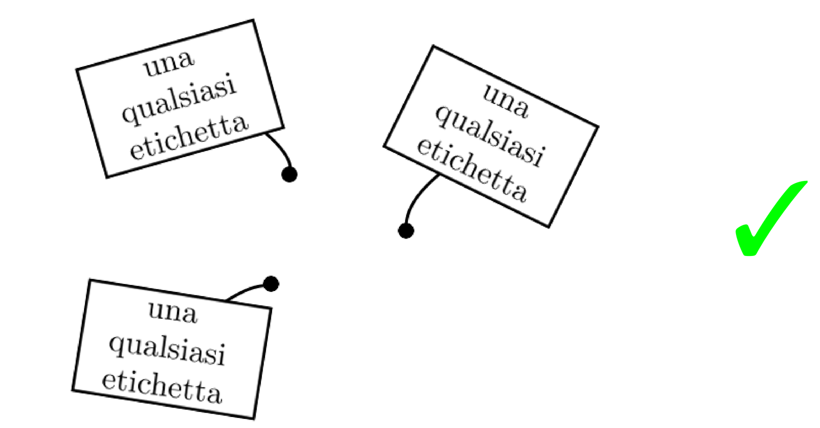
La soluzione

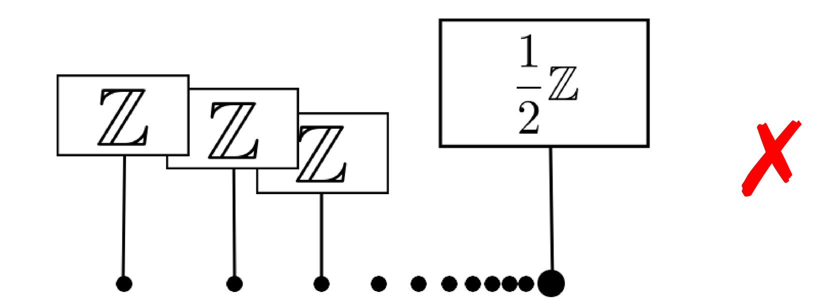
Uno spazio etichettato $(X, (L_x)_{x \in X})$ è $\operatorname{Max} G$ per qualche ℓ-gruppo unitale G se e solo se,

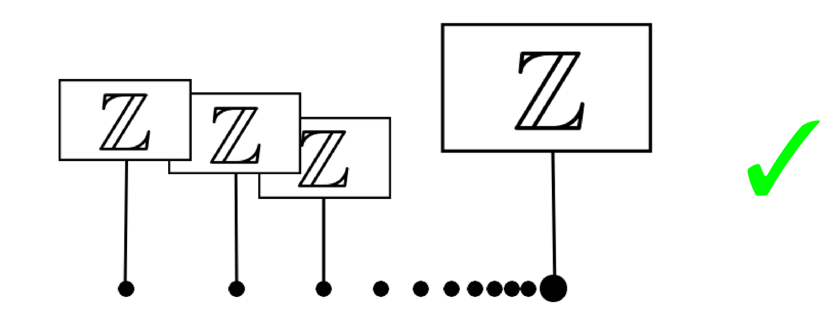
1. X è un compatto di Hausdorff;
2. per ogni $n \in \mathbb{N}_{>0}$, l'insieme
$$\left\{x \in X \mid L_x \subseteq \frac{1}{n}\mathbb{Z}\right\}$$
è chiuso;
3. per ogni coppia A e B di sottoinsiemi chiusi disgiunti di X, esistono due aperti disgiunti U e V contenenti A e B, rispettivamente, tali che, per ogni $x \in X \setminus (U \cup V)$, si ha $L_x = \mathbb{R}$.

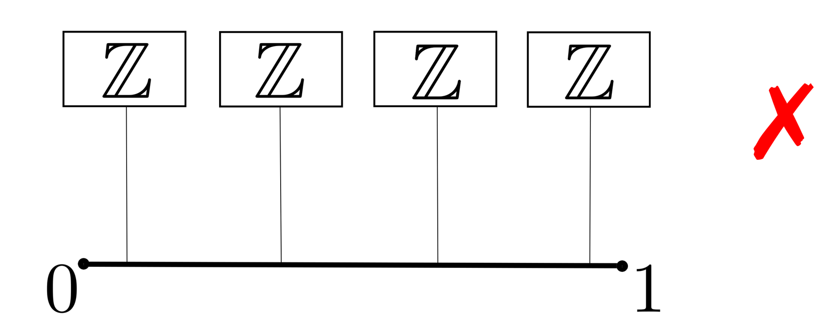


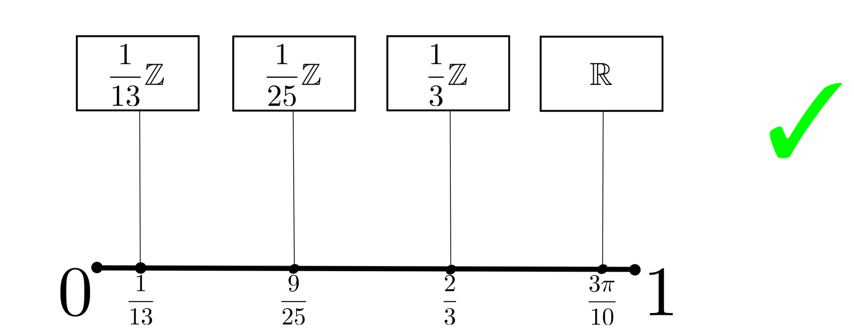
Esempi











Dualità

Questo risultato si estende a una dualità per la categoria degli ℓ-gruppi unitali completi nella norma indotta dall'unità.

Domande aperte

Come vanno generalizzate le condizioni 1. 2. e 3. nella nostra soluzione se, per ogni punto indiscreto $\mathfrak{m}$, all'etichetta '$\mathbb{R}$' si sostituisce precisamente il sottogruppo $G/\mathfrak{m}$ di $\mathbb{R}$?