Operazioni che preservano l'integrabilità: caratterizzazione e strutture algebriche correlate.

Marco Abbadini

Tutore: Prof. Vincenzo Marra

Overview

Parte I: Operazioni che preservano l'integrabilità: caratterizzazione

Caratterizzazione delle operazioni per le quali gli spazi $\mathcal{L}^1$ sono chiusi.

Parte II: Algebra Universale

Presentazione dell'ambito di ricerca.

Parte III: Strutture algebriche correlate

Studio degli insiemi dotati delle operazioni caratterizzate in Parte I che soddisfano certi assiomi.

Overview

Parte I: Operazioni che preservano l'integrabilità: caratterizzazione

Parte II: Algebra universale

Parte III: Strutture algebriche correlate

Per $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ spazio di misura, poniamo

$$\mathcal{L}^1(\mu) = \left\{ f\colon \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ è } \mathcal{F}\text{-misurabile e } \int_\Omega |f| \, d\mu < \infty \right\}.$$

Se $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, allora

- $f + g \in \mathcal{L}^1(\mu)$;
- $f \cdot g$ potrebbe non appartenere a $\mathcal{L}^1(\mu)$.

Sia I un insieme, e $\tau\colon \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}$.

Per ogni insieme Ω, τ definisce, puntualmente, un'operazione sull'insieme delle funzioni da Ω in $\mathbb{R}$.

Diciamo che τ *preserva l'integrabilità su* μ se $\mathcal{L}^1(\mu)$ è chiuso per τ (definito puntualmente). Diciamo che τ *preserva l'integrabilità* se preserva l'integrabilità su ogni misura.

Esempi

1. L'addizione $+\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
2. Per $\lambda \in \mathbb{R}$, la moltiplicazione scalare $\lambda(\,\cdot\,)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
3. La costante $0\colon \mathbb{R}^0 \to \mathbb{R}$.
4. Il sup binario $\vee\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
5. L'inf binario $\wedge\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
6. L'operazione unaria $\overline{\,\cdot\,}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, detta *troncamento a* 1:
$$\overline{x} := x \wedge 1.$$
7. L'operazione $\curlyvee\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, chiamata *sup troncato*:
$$\curlyvee(y, x_1, x_2, \dots) := \sup_{n \in \{1,2,\dots\}} \inf\{x_n, y\}.$$

Domanda

Per quali operazioni $\mathbb{R}^I \to \mathbb{R}$ sono chiusi gli spazi $\mathcal{L}^1(\mu)$?

In altre parole, quali operazioni preservano l'integrabilità?

Teorema

Le operazioni che preservano l'integrabilità sono esattamente quelle ottenute per composizione da

$$+,\ \lambda(\,\cdot\,)\ (\textit{per ogni}\ \lambda \in \mathbb{R}),\ 0,\ \vee,\ \wedge,\ \overline{\,\cdot\,}\ \textit{e}\ \curlyvee.$$

Abbiamo una caratterizzazione esplicita.

Numero finito di variabili

$\tau\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ preserva l'integrabilità se, e solo se,

1. τ è Borel misurabile, e
2. $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, abbiamo

$$|\tau(x)| \leqslant \lambda_1|x_1| + \cdots + \lambda_n|x_n|.$$

Overview

Parte I: Operazioni che preservano l'integrabilità: caratterizzazione

Parte II: Algebra universale

Parte III: Strutture algebriche correlate

Esempio: gruppi

Un gruppo è un insieme G su cui sono definite le seguenti operazioni:

1. Prodotto. $\cdot\colon G^2 \to G$.
2. Inverso. $(\,\cdot\,)^{-1}\colon G \to G$.
3. Elemento neutro: $e \in G$.

e che soddisfa i seguenti assiomi:

1. $\forall x, y, z \in G \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
2. $\forall x \in G \quad x \cdot e = x$.
3. $\forall x \in G \quad e \cdot x = x$.
4. $\forall x \in G \quad x \cdot x^{-1} = e$.
5. $\forall x \in G \quad x^{-1} \cdot x = e$.

Un omomorfismo di gruppi $f : G \to H$ è una funzione che preserva prodotto, inverso e elemento neutro:

1. Per ogni $x, y \in G$, $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$;
2. Per ogni $x \in G$, $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$;
3. $f(e) = e$.

Esempio: Spazi vettoriali reali

Uno spazio vettoriale reale è un insieme V su cui sono definite le seguenti operazioni

1. $+\colon V^2 \to V$.
2. $-\colon V \to V$.
3. $0 \in V$.
4. $\lambda(\,\cdot\,)\colon V \to V$ (per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$).

e che soddisfa i seguenti assiomi.

1. Assiomi di gruppo per $(V, +, -, 0)$, e
   $\forall u, v \in V \quad u + v = v + u$.
2. Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha l'assioma
   $\forall u, v \in V \quad \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.
3. Per ogni $\lambda_1, \lambda_2, \lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, si ha l'assioma
   $\forall u \in V \quad \lambda u = \lambda_1 u + \lambda_2 u$.
4. Per ogni $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, si ha l'assioma
   $\forall u \in V \quad \lambda_1(\lambda_2 u) = (\lambda_1 \lambda_2) u$.
5. $\forall u \in V \quad 1u = u$.

Un omomorfismo di spazi vettoriali reali (o applicazione lineare) $f\colon V \to W$ è una funzione che preserva $+$, $-$, 0, $\lambda(\,\cdot\,)$ (per $\lambda \in \mathbb{R}$).

1. Per ogni $u, v \in V,\ \ f(u+v) = f(u) + f(v)$;
2. Per ogni $u \in V,\ \ f(-u) = -f(u)$;
3. $f(0) = 0$;
4. Per $\lambda \in \mathbb{R}$:
   per ogni $u \in V,\ \ f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Fissato un insieme $\mathcal{L}$ (esempio: $\{\,\cdot\,, (\,\cdot\,)^{-1}, e\}$), e fissato per ciascun elemento $\tau \in \mathcal{L}$ una cardinalità ar_τ

$$(\text{esempio: } 2 \text{ per } \,\cdot\,, 1 \text{ per } (\,\cdot\,)^{-1}, 0 \text{ per } e),$$

una $\mathcal{L}$-*algebra* è un insieme A dotato, per ogni $\tau \in \mathcal{L}$, di una funzione $\tau_A \colon A^{ar_\tau} \to A$.

Esempio:

$$\cdot_A; \colon A^2 \to A;$$
$$(\,\cdot\,)_A^{-1} \colon A \to A;$$
$$e \colon A^0 = \{\star\} \to A.$$

Una *varietà di algebre* è la classe $\mathcal{V}$ delle $\mathcal{L}$-algebre (per un determinato insieme $\mathcal{L}$) che soddisfano un determinato insieme di assiomi equazionali, cioè della forma

$$\forall (x_i)_{i\in I} \quad \tau((x_i)_{i\in I}) = \rho((x_i)_{i\in I}).$$

Per ogni coppia $A, B \in \mathcal{V}$, un omomorfismo da A a B è una funzione $f : A \to B$ che preserva ogni operazione $\tau \in \mathcal{L}$:

$$f(\tau_A((x_i)_{i\in ar_\tau})) = \tau_B((f(x_i))_{i\in ar_\tau}).$$

Esempi di varietà di algebre

1. Gruppi.
2. Spazi vettoriali reali.
3. Anelli.
4. Reticoli.
5. Algebre di Lie.

L'algebra universale studia le proprietà comuni alle varietà di algebre.

Esempi

1. Un omomorfismo ammette un omomorfismo inverso se, e solo se, è biiettivo.
2. Teoremi di isomorfismo.
3. Per ogni insieme X, esiste l'*oggetto libero* Free_X su X (il gruppo libero, per i gruppi).

   Esso consiste di tutte le "parole" ottenibili da X utilizzando le operazioni della varietà di algebre, modulo identificazioni dovute agli assiomi.

   Esistenza prodotto tensoriale $V \otimes W$.

Overview

Parte I: Operazioni che preservano l'integrabilità: caratterizzazione

Parte II: Algebra universale

Parte III: Strutture algebriche correlate

Ricordiamo:

1. su $\mathbb{R}$ sono definite le operazioni
$$+,\ \lambda(\,\cdot\,)\ (\text{per ogni } \lambda \in \mathbb{R}),\ 0,\ \vee,\ \wedge,\ \overline{\,\cdot\,} \text{ e } \curlyvee;$$
2. per ogni spazio di misura $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, le operazioni sopra sono definite in $\mathcal{L}^1(\mu)$, puntualmente.

$\mathcal{V} :=$ collezione degli insiemi dotati di operazioni denotate con i simboli

$$+,\ \lambda(\,\cdot\,)\ (\text{per ogni } \lambda \in \mathbb{R}),\ 0,\ \vee,\ \wedge,\ \overline{\,\cdot\,}\ \text{e}\ \curlyvee,$$

che soddisfano tutte le equazioni soddisfatte da $\mathbb{R}$.

Esempio di equazione: $\forall x\ \ 3(2(x)) = 6(x)$.

Omomorfismi tra oggetti di $\mathcal{V}$: funzioni che preservano

$$+,\ \lambda(\,\cdot\,)\ (\text{per ogni } \lambda \in \mathbb{R}),\ 0,\ \vee,\ \wedge,\ \overline{\,\cdot\,}\ \text{e}\ \curlyvee.$$

$\mathcal{V}$ è una varietà di algebre.

Appartengono a $\mathcal{V}$:

1. $\mathcal{L}^1(\mu)$;
2. $L^1(\mu) := \frac{\mathcal{L}^1(\mu)}{\sim}$, dove $f \sim g$ sse $f = g$ μ-quasi ovunque.

Dato Ω un insieme, dato $S \subseteq \{f : \Omega \to \mathbb{R}\}$ chiuso per

$$+, \lambda(\,\cdot\,) \text{ (per ogni } \lambda \in \mathbb{R}), 0, \vee, \wedge, \bar{\cdot} \text{ e } \curlyvee,$$

(puntualmente definite), dato $\mathcal{I}$ insieme di sottoinsiemi di Ω t.c.

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$;
2. $B \in \mathcal{I}, A \subseteq B \Rightarrow A \in \mathcal{I}$;
3. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{I}$;

e posto $f \sim g$ sse $\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\} \in \mathcal{I}$, allora

$$\frac{S}{\sim} \in \mathcal{V}.$$

Teorema

Ogni $A \in \mathcal{V}$ si ottiene in questo modo.

Risultati

Teorema

$\mathcal{V}$ coincide con "la categoria degli spazi di Riesz troncati Dedekind σ-completi".

Corollario

La categoria degli spazi di Riesz troncati Dedekind σ-completi è una varietà di algebre.

Perciò ad essa si applicano i risultati dell'algebra universale.

Corollario

Ogni equazione che vale in $\mathbb{R}$, con operazioni

$$+,\ \lambda(\,\cdot\,)\ (\textit{per ogni } \lambda \in \mathbb{R}),\ 0,\ \vee,\ \wedge,\ \overline{\,\cdot\,}\ \textit{e}\ \curlyvee,$$

vale in ogni spazio di Riesz troncato Dedekind σ-completo (esempio: $\mathcal{L}^1(\mu)$, $L^1(\mu)$).

Esempio di equazione: $\forall x, y \quad 7(x+y) = 7x + 7y$.

Teorema

Se in $\mathbb{R}$ *vale*

$$\forall (x_i)_{i\in I} \quad \begin{cases} \tau_1((x_i)_i) = \rho_1((x_i)_i); \\ \tau_2((x_i)_i) = \rho_2((x_i)_i); \\ \quad\vdots \end{cases} \qquad \Rightarrow \alpha((x_i)_i) = \beta((x_i)_i),$$

dove le operazioni utilizzate sono 0, $+$, $\lambda(\,\cdot\,)$ *(per ogni* $\lambda \in \mathbb{R}$*),* $\vee$, $\wedge$, $\overline{\,\cdot\,}$ *e* $\curlyvee$*, allora vale in ogni spazio di Riesz troncato Dedekind* σ*-completo (esempio:* $\mathcal{L}^1(\mu)$, $L^1(\mu)$*).*

Esempio:

In $\mathbb{R}$ vale

$$\begin{cases} f = \sup_n f_n \\ g = \sup_n g_n \end{cases} \Rightarrow f + g = \sup_n \{f_n + g_n\}. \tag{1}$$

La condizione $a = \sup_n a_n$ è equivalente a un sistema di numerabili equazioni:

$$\begin{cases} a = \Upsilon(a, a_1, a_2, \dots); \\ a_1 \wedge a = a_1; \\ a_2 \wedge a = a_2; \\ a_3 \wedge a = a_3; \\ \quad \vdots \end{cases} .$$

Perciò (1) vale in ogni spazio di Riesz troncato Dedekind σ-completo (esempio: $L^1(\mu)$).

Grazie per l'attenzione.