ALGEBRA 2
ESERCIZI DI QUALCHE INTERESSE

MARCO ABBADINI

Esercizio 1. Esiste un gruppo G contenente un sottogruppo proprio H isomorfo a G?

Esercizio 2. Esiste un gruppo G non banale tale che $G \simeq G \times G$?

Esercizio 3. Dati tre gruppi G, H e H', è vero che $G \times H \simeq G \times H'$ implica $H \simeq H'$?

Esercizio 4. Esiste un gruppo non banale G contenente un sottogruppo normale H tale che sia H che G/H sono isomorfi a G?

Esercizio 5. Dimostra o confuta la seguente affermazione.

> Sia G un gruppo generato da un suo sottoinsieme finito H tale che ogni elemento di H ha periodo finito. Allora G è finito.

Esercizio 6. Dimostra o confuta la seguente affermazione.

> Sia G un gruppo tale che ogni elemento di G ha periodo finito. Allora G è finito.

Esercizio 7. Dimostra o confuta la seguente affermazione.

> Sia G un gruppo tale che ogni sottogruppo proprio di G è finito. Allora G è finito.

Esercizio 8. Dimostrare che se $\mathrm{Aut}(G)$ è ciclico, allora G è abeliano.

Esercizio 9. Esiste un gruppo G tale che $\mathrm{Aut}(G)$ ha ordine 3?

Esercizio 10. Esiste un gruppo infinito semplice?

Esercizio 11. Dimostra o confuta la seguente affermazione.

> Ogni insieme non vuoto può essere dotato di un'operazione che lo rende un gruppo.

1. Domanda la cui risposta non so.

Ecco una domanda la cui risposta non so (ma che forse la comunità matematica già sa). Se la scoprite, siete i benvenuti per spiegarmela.

Facciamo una premessa sulla notazione. Data una famiglia di gruppi $\{G_i\}_{i\in I}$, chiamiamo *prodotto diretto di* $\{G_i\}_{i\in I}$, e lo denotiamo con $\prod_{i\in I} G_i$, il gruppo che ha come insieme soggiacente il prodotto insiemistico $\prod_{i\in I} G_i$ e in cui l'operazione di gruppo è definita componente per componente: $(g_i)_{i\in I} \cdot (h_i)_{i\in I} \coloneqq (g_i h_i)_{i\in I}$. Chiamiamo *somma diretta di* $\{G_i\}_{i\in I}$, e lo denotiamo con $\bigoplus_{i\in I} G_i$, il sottogruppo di $\prod_{i\in I} G_i$ costituito dagli elementi $(g_i)_{i\in I}$ tali che $\{i \in I \mid g_i \neq 1\}$ è finito (con 1 indichiamo l'elemento neutro del gruppo).

Esercizio 12. Esiste un insieme I tale che $\prod_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{Z}, +) \simeq \bigoplus_{i\in I}(\mathbb{Z}, +)$?

Ultimo aggiornamento: 17 aprile 2020.