ESERCIZI TUTORATO ALGEBRA 2
10 GENNAIO 2020 - LEZIONE 10 (E SEGUENTI)

MARCO ABBADINI

Esercizio 1 (Prova scritta, 17 Febbraio 2014, eserc. 2).
Mostrare che un gruppo di ordine p^2q^2, con p, q primi, non è semplice.[1]

Esercizio 2 (Prova scritta, 25 Settembre 2015, eserc. 4).
Sia G un gruppo finito, H un sottogruppo di G e p un primo. Provare che il numero di p-sottogruppi di Sylow di H è limitato superiormente dal numero di p-sottogruppi di Sylow di G.

Esercizio 3 (Prova scritta, 29 Gennaio 2016, eserc. 2).
Sia G un gruppo, e siano H e K sottogruppi di G tali che G sia prodotto diretto (interno) di H e K. Provare che $\mathrm{Aut}(H) \times \mathrm{Aut}(K)$ è isomorfo ad un sottogruppo di $\mathrm{Aut}(G)$. Provare poi che, se H e K sono sottogruppi caratteristici di G, allora $\mathrm{Aut}(H) \times \mathrm{Aut}(K) \simeq \mathrm{Aut}(G)$.

Esercizio 4 (Prova scritta, 20 Aprile 2016, eserc. 2).
Sia G un gruppo finito, di ordine rs con $\mathrm{MCD}(r, s) = 1$. Definendo $T = \{x \in G \mid x^r = 1\}$, e $H = \langle T \rangle$, si provi che

(a) r divide $|H|$,

(b) se G è abeliano, allora $H = T$ e $|H| = r$.

Inoltre si mostri con esempi che, se G non è abeliano, si può avere sia $|H| = r$ sia $|H| \neq r$.

Esercizio 5 (Prova scritta, 15 Luglio 2016, eserc. 1).
Sia G un gruppo finito e p un numero primo. Dimostrare che G ha un quoziente di ordine p se e solo se, per ogni $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, si ha $P \cap G' \neq P$ (dove G' indica il sottogruppo derivato di G).

Esercizio 6 (Prova scritta, 24 Gennaio 2017, eserc. 3).
Sia G un gruppo di ordine 12.

(a) Provare che se G ha un 3-sottogruppo di Sylow normale, allora il centro di G ha ordine pari.

(b) Provare che se il centro di G ha ordine dispari, allora G è isomorfo al gruppo alterno su quattro oggetti.

Ultimo aggiornamento: 5 gennaio 2020.

[1] Non è richiesto che p e q siano distinti.

Esercizio 7 (Prova scritta, 15 Giugno 2017, eserc. 2)**.**
Sia p un divisore primo dell'ordine del gruppo finito G, e sia $N \trianglelefteq G$ con $|N| = p$. Si provi che $N \leq P$ per ogni p- sottogruppo di Sylow P di G.

Esercizio 8 (Prova scritta, 15 Giugno 2017, eserc. 4)**.**
Sia G un gruppo di ordine 21, e si assuma che esista un omomorfismo non banale $\phi : G \to \mathbb{Z}_7$ (cioè tale che G non coincida col nucleo).

(a) Si provi che G ha un unico sottogruppo normale di ordine 3.
(b) Si provi che G è ciclico.

Esercizio 9 (Prova scritta, 19 Luglio 2017, eserc. 4)**.**
Sia G un gruppo di ordine 231.

(a) Si provi che esiste un omomorfismo non banale di G in un gruppo ciclico di ordine 3.
(b) Si provi che G ha elementi di ordine 77 e di ordine 33.
(c) Supponendo G non abeliano, si determini il numero di sottogruppi di Sylow di G per ciascun divisore primo del suo ordine, e si provi che in questo caso non esiste alcun omomorfismo non banale di G in un gruppo ciclico di ordine 7.

Esercizio 10 (Prova scritta 16 Novembre 2017, eserc. 1)**.** Sia G un gruppo, e siano $N \trianglelefteq G$ e $H \leq G$ tali che $G = NH$. Si provi che se N è abeliano, allora $N \cap H \trianglelefteq G$. Si dica poi se la stessa conclusione è vera senza assumere l'abelianità di N.

Esercizio 11 (Prova scritta, 25 Gennaio 2018, eserc. 2)**.**
Sia G un gruppo di ordine $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$. Supponiamo che esista $N \trianglelefteq G$, con N abeliano di ordine 6.

(a) Sia $a \in N$ un elemento di ordine 3; si provi che $\langle a \rangle$ è normale in G, e che $\mathbf{C}_G(a) = G$. Si concluda che N è contenuto in $\mathbf{Z}(G)$.
(b) Ricordando che $\mathbf{Z}(G)$ è contenuto nel normalizzante di ogni sottogruppo di G, si provi che G ha un unico 5-sottogruppo di Sylow.
(c) Si deduca che G è abeliano.

Esercizio 12 (Prova scritta, 22 Febbraio 2018, eserc. 1)**.**
Sia $G = \mathrm{Sym}(n)$ (con $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$), e sia π un n-ciclo in G.

(a) Si determini $\mathbf{C}_G(\pi)$.
(b) Se $n = p$ è un numero primo, si determini il numero di p-sottogruppi di Sylow di G.

Esercizio 13 (Prova scritta, 22 Novembre 2018, eserc. 3)**.**
Dimostrare che un gruppo finito di ordine 108 ha un sottogruppo normale di ordine 9 o 27.