ESERCIZI TUTORATO ALGEBRA 2
13 E 15 GENNAIO 2020 - LEZIONI 11 E 12

MARCO ABBADINI

Esercizio 1 (Prova scritta, 28 Aprile 2017, eserc. 4)**.**
Provare che un gruppo G ha esattamente tre sottogruppi se e solo se è ciclico di ordine p^2, dove p è un numero primo.

Esercizio 2 (Prova scritta, 16 Giugno 2014, eserc. 1)**.**
Determinare (a meno di isomorfismi) tutti i gruppi di ordine 45, e per ciascuno di essi gli ordini degli elementi. Provare poi che un gruppo di ordine 315 non è semplice.

Esercizio 3 (Prova scritta, 25 Gennaio 2018, eserc. 2)**.**
Sia G un gruppo di ordine $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$. Supponiamo che esista $N \trianglelefteq G$, con N abeliano di ordine 6.

(a) Sia $a \in N$ un elemento di ordine 3; si provi che $\langle a \rangle$ è normale in G, e che $\mathbf{C}_G(a) = G$. Si concluda che N è contenuto in $\mathbf{Z}(G)$.
(b) Ricordando che $\mathbf{Z}(G)$ è contenuto nel normalizzante di ogni sottogruppo di G, si provi che G ha un unico 5-sottogruppo di Sylow.
(c) Si deduca che G è abeliano.

Esercizio 4 (Prova scritta, 14 Settembre 2017, eserc. 4)**.**
Sia C un gruppo ciclico di ordine 12 che agisce fedelmente sull'insieme $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Si provi che non esistono orbite di lunghezza 1 (ovvero, non esistono punti fissi) in tale azione.

Esercizio 5 (Prova scritta, 25 Settembre 2015, eserc. 4)**.**
Sia G un gruppo finito, H un sottogruppo di G e p un primo. Provare che il numero di p-sottogruppi di Sylow di H è limitato superiormente dal numero di p-sottogruppi di Sylow di G.

Esercizio 6 (Prova scritta, 20 Aprile 2016, eserc. 2)**.**
Sia G un gruppo finito, di ordine rs con $\mathrm{MCD}(r, s) = 1$. Definendo $T = \{x \in G \mid x^r = 1\}$, e $H = \langle T \rangle$, si provi che

(a) r divide $|H|$,
(b) se G è abeliano, allora $H = T$ e $|H| = r$.

Ultimo aggiornamento: 15 gennaio 2020.

Inoltre si mostri con esempi che, se G non è abeliano, si può avere sia $|H| = r$ sia $|H| \neq r$.

Esercizio 7 (Prova scritta, 15 Luglio 2016, eserc. 1)**.**
Sia G un gruppo finito e p un numero primo. Dimostrare che G ha un quoziente di ordine p se e solo se, per ogni $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, si ha $P \cap G' \neq P$ (dove G' indica il sottogruppo derivato di G).

Esercizio 8 (Prova scritta, 15 Giugno 2017, eserc. 2)**.**
Sia p un divisore primo dell'ordine del gruppo finito G, e sia $N \trianglelefteq G$ con $|N| = p$. Si provi che $N \leq P$ per ogni p- sottogruppo di Sylow P di G.

Esercizio 9 (Prova scritta, 15 Giugno 2017, eserc. 4)**.**
Sia G un gruppo di ordine 21, e si assuma che esista un omomorfismo non banale $\phi : G \to \mathbb{Z}_7$ (cioè tale che G non coincida col nucleo).

(a) Si provi che G ha un unico sottogruppo normale di ordine 3.
(b) Si provi che G è ciclico.

Esercizio 10 (Prova scritta 16 Novembre 2017, eserc. 1)**.** Sia G un gruppo, e siano $N \trianglelefteq G$ e $H \leq G$ tali che $G = NH$. Si provi che se N è abeliano, allora $N \cap H \trianglelefteq G$. Si dica poi se la stessa conclusione è vera senza assumere l'abelianità di N.

Esercizio 11 (Prova scritta, 22 Febbraio 2018, eserc. 1)**.**
Sia $G = \mathrm{Sym}(n)$ (con $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$), e sia π un n-ciclo in G.

(a) Si determini $\mathbf{C}_G(\pi)$.
(b) Se $n = p$ è un numero primo, si determini il numero di p-sottogruppi di Sylow di G.