ESERCIZI TUTORATO ALGEBRA 2
16 GENNAIO 2020 - LEZIONI 13

MARCO ABBADINI

Esercizio 1 (Prova scritta, 28 Aprile 2015, eserc. 3)**.**
Sia G un gruppo finito, siano H, K sottogruppi normali di G tali che $G = HK$, e sia P un sottogruppo di Sylow di G. Mostrare che si ha $P = (P \cap H)(P \cap K)$.

Esercizio 2 (Prova scritta 16 Settembre 2016, eserc. 2)**.** Sia G un gruppo abeliano finito di ordine dispari, e sia α un automorfismo di G tale che α^2 sia l'identità. Sia $H = \{h \in G \mid \alpha(h) = h\}$, e $K = \{k \in G \mid \alpha(k) = k^{-1}\}$.

(a) Provare che H e K sono sottogruppi di G.
(b) Provare che G è prodotto diretto di H e K. (Sugg.: per ogni $g \in G$, si ha $g = g \cdot \alpha(g)^{-1} \cdot \alpha(g)$...)

Esercizio 3 (Prova scritta 16 Settembre 2016, eserc. 1)**.** (a) Sia G un gruppo non banale. Provare che se A, B sono due sottogruppi normali abeliani di G tali che $G = AB$, allora il centro $Z(G)$ è non banale.
(b) Si consideri il prodotto diretto $S_3 \times C_2$, dove C_2 è il gruppo con due elementi. Mostrare che $Z(G)$ è non banale, ma non esistono due sottogruppi normali abeliani A, B tali che $G = AB$.

Esercizio 4 (Prova scritta, 19 Novembre 2015, eserc. 1)**.**
Sia G un gruppo di ordine 99. Provare che G è abeliano e studiare il gruppo $\mathrm{Aut}(G)$.

Esercizio 5 (Prova scritta, 20 Febbraio 2019, eserc. 2)**.**
Sia $G = S_n$, il gruppo simmetrico su n oggetti.

(a) Provare che, se $\sigma \in G$ ha periodo $2^s \cdot m$, con m dispari, allora si ha $\langle \sigma \rangle = \langle \sigma^m \rangle \times \langle \sigma^{2^s} \rangle$ (prodotto diretto interno).
(b) Provare che, per $\sigma \in G$, esiste una coppia $(\sigma_2, \sigma_{2'})$ di elementi di G con le seguenti proprietà: (i) $\sigma = \sigma_2 \cdot \sigma_{2'}$; (ii) σ_2 ha periodo una potenza di 2 e $\sigma_{2'}$ ha periodo dispari; (iii) σ_2 e $\sigma_{2'}$ commutano.
(c) Sia H un sottogruppo di G, e sia D un 2-sottogruppo di Sylow di H. Provare che H è contenuto nel gruppo alterno A_n se e solo se $D \leq A_n$. (Sugg.: si usi il punto precedente.)

Esercizio 6 (Prova scritta, 24 Giugno 2016, eserc. 3)**.**
Sia G un gruppo abeliano finito, e sia H un suo sottogruppo tale che $|H|$ sia coprimo con $|G : H|$: provare che G è ciclico se e solo se lo sono H e G/H. Si dica poi se tale enunciato vale anche per G non abeliano (supponendo $H \trianglelefteq G$).

Esercizio 7 (Prova scritta, 23 Febbraio 2017, eserc. 4)**.**
Sia G un gruppo di ordine $760 = 2^3 \cdot 5 \cdot 19$, e sia P un 19-sottogruppo di Sylow di G. Si supponga che P sia normale in G.

(a) Provare che $\mathbf{C}_G(P)$ è normale in G, e determinare i possibili ordini di $\mathbf{C}_G(P)$.
(b) Provare che G ha un sottogruppo normale ciclico di ordine 95.

Ultimo aggiornamento: 16 gennaio 2020.

Esercizio 8 (Prova scritta, 17 Luglio 2019, eserc. 2)**.**
Sull'insieme $G = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$ si definisca la seguente operazione:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (a + (-1)^b c, b + d).$$

Ciò definisce una struttura di gruppo (non è necessario provarlo).

(a) Si determini $\mathbf{Z}(G)$, sia elencando i suoi elementi, sia indicandone il tipo di isomorfismo.

(b) Si determini il tipo di isomorfismo di $G/\mathbf{Z}(G)$.

Esercizio 9 (Prova scritta, 14 Settembre 2017, eserc. 3)**.**
Sia G un gruppo di ordine $pqrt$, con p, q, r, t primi (non necessariamente distinti). Si dimostri che, se $p > qrt$, allora G ha sottogruppi di ordine rispettivamente pq, pr e pt.

Esercizio 10 (Prova scritta, 19 Luglio 2017, eserc. 2)**.**
Nel gruppo simmetrico S_6 si consideri l'insieme T costituito dagli elementi di periodo 3.

(a) Si dica quali classi di coniugio di S_6 sono contenute in T, e si determini $|T|$.

(b) Per ogni $x \in T$, si determini l'ordine del centralizzante in S_6 di x.