ESERCIZI TUTORATO ALGEBRA 2
18 OTTOBRE 2019 - LEZIONE 2

MARCO ABBADINI

Prima di passare agli esercizi, ricordo il seguente fatto, che può essere utile per elencare gli elementi dei gruppi ciclici. Tale fatto risponde alla domanda: quali sono gli elementi di un gruppo ciclico?

Fatto. Sia G un gruppo ciclico, e sia $g \in G$ un suo generatore.

(a) Nel caso in cui il periodo di g è finito (cioè esiste un intero positivo k tale che $g^k = 1$), denotando con n tale periodo (= il più piccolo intero positivo k tale che $g^k = 1$), gli elementi di G sono precisamente $1, g, g^2, \dots, g^{n-2}, g^{n-1}$ e questi sono a due a due distinti.

(b) Nel caso in cui il periodo di g non è finito, allora gli elementi di G sono precisamente

$$\dots, g^{-3}, g^{-2}, g^{-1}, 1, g, g^1, g^2, g^3 \dots,$$

e questi sono a due a due distinti.

In particolare, G è finito se e solo se il periodo di g lo è, e in tal caso l'ordine di G e il periodo di g coincidono.

Esercizio 1. Sia G un gruppo, generato da un elemento g il cui ordine è 12.

(a) Determinare, per ogni $h \in G = \{1, g, g^2, \dots, g^{10}, g^{11}\}$, il sottogruppo generato da h.

(b) Determinare il sottogruppo di G generato da $\{g^4, g^6\}$.

Esercizio 2. (a) Sia $\sigma := (1\ 2) \in S_4$. Trovare $\tau \in S_4$ tale che $\tau^{-1}\sigma\tau = (3\ 4)$.

(b) Sia $\alpha := (1\ 2)(3\ 4\ 5) \in S_5$. Trovare $\beta \in S_5$ tale che $\beta^{-1}\alpha\beta = (1\ 4)(3\ 5\ 2)$.

(c) Sia $\gamma := (1\ 2) \in S_3$. Esiste $\delta \in S_3$ tale che $\delta^{-1}\gamma\delta = (1\ 2\ 3)$?

Esercizio 3 (Prova scritta, 14 Settembre 2017, eserc. 1)**.** Sia $G = S_6$ il gruppo simmetrico su 6 oggetti.

(a) Quante sono le classi di coniugio di elementi di ordine 6 in G?

(b) Quante sono le classi di coniugio di elementi di ordine 12 in G?

(c) È vero che ogni elemento di ordine 3 di G è il quadrato di un elemento di ordine 6?

Esercizio 4. [1] Sia H l'insieme dei numeri razionali rappresentabili con frazioni della forma $\dfrac{m}{7^\epsilon}$, con $\epsilon \in \{0, 1\}$.

(a) Si provi che H è un sottogruppo di $(\mathbb{Q}, +)$ contenente $\mathbb{Z}$.

(b) Si provi che $\mathbb{Z}$ è un sottogruppo normale di H.

(c) Si determini $[H : \mathbb{Z}]$, mostrando esplicitamente un insieme di rappresentanti per i laterali di $\mathbb{Z}$ in H.

(d) Si stabilisca se il gruppo quoziente $H/\mathbb{Z}$ è ciclico.

Ultimo aggiornamento: 16 ottobre 2019. Nella presente versione l'esercizio 4 accorpa gli esercizi 4 e 5 della versione precedente. Inoltre si è aggiunta una considerazione alla fine del Fatto.

[1] L'esercizio 4, nella forma presente, coincide con l'esercizio 2 della prova scritta del 22 Novembre 2018, ad eccezione dei punti (b) e (d), che sono stati introdotti per questa esercitazione.