ESERCIZI TUTORATO ALGEBRA 2
8 NOVEMBRE 2019 - LEZIONE 4

MARCO ABBADINI

Esercizio 1 (Prova scritta, 26 Febbraio 2016, eserc. 1)**.**
Sia G un gruppo finito. Determinare tutti i possibili omomorfismi di G in $\mathbb{Z}$.

Esercizio 2 (Prova scritta, 17 Luglio 2015, eserc. 1)**.** Sia G un gruppo abeliano, e sia n un intero positivo. Si considerino gli insiemi $G_1 = \{g \in G \ : \ g^n = 1\}$, e $G_2 = \{g^n \ : \ g \in G\}$. Provare che G_1 e G_2 sono sottogruppi normali di G, e che $G/G_1 \simeq G_2$.

Esercizio 3 (Prima prova intermedia, 19 Novembre 2013, eserc. 3)**.**
Sia ϕ un omomorfismo definito su un gruppo finito G, e sia H un sottogruppo di G. Provare che:
(a) $|\phi(G) : \phi(H)|$ divide $|G : H|$.
(b) $|\phi(H)|$ divide $|H|$.

Esercizio 4 (Prova scritta 17 Giugno 2015, eserc. 3)**.** Sia N un sottogruppo normale di un gruppo finito G. Mostrare che se H è un sottogruppo di G di ordine coprimo con $|G/N|$, allora $H \leq N$.

Esercizio 5 (Prova scritta, 28 Aprile 2015, eserc. 1)**.**
Sia G un gruppo finito e siano H e K sottogruppi di G tali che $|G| < |H|^2$ e $|G| < |K|^2$. Provare che si ha $H \cap K \neq 1$.

Esercizio 6. Definiamo
$$H \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \ : \ a, b, d \in \mathbb{R}, \ ad \neq 0 \right\},$$
$$L \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ : \ b \in \mathbb{R} \right\}.$$
(a) Provare che H ed L sono sottogruppi di $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.
(b) L è normale in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$?
(c) H è normale in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$?
(d) Provare che L è normale in H.
(e) Provare che L è isomorfo a $(\mathbb{R}, +)$.
(f) Determinare un insieme di rappresentanti dei laterali di L in H, e, per ogni rappresentante, descrivere il laterale corrispondente. Dimostrare che H/L è isomorfo a $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, dove $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e l'operazione di gruppo su $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ è definita dal prodotto coordinata per coordinata: $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \coloneqq (x_1x_2, y_1y_2)$. H/L è abeliano? È ciclico?

Ultimo aggiornamento: 29 ottobre 2019.