ESERCIZI TUTORATO ALGEBRA 2
22 NOVEMBRE 2019 - LEZIONE 5

MARCO ABBADINI

Data una permutazione $\sigma \in S_n$, definiamo

$$\operatorname{supp} \sigma \coloneqq \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \sigma(i) \neq i\},$$

ovvero gli elementi di $\{1, \ldots, n\}$ che sono "mossi" da σ.
Inoltre ricordiamo che, dati due elementi g ed h in un gruppo, si definisce il commutatore $[g, h] \coloneqq g^{-1}h^{-1}gh$.

Esercizio 1. Sia n un intero nonnegativo. Provare le seguenti affermazioni.

(a) Per ogni coppia di elementi $\sigma, \tau \in S_n$ tali che $\operatorname{supp} \sigma \cap \operatorname{supp} \tau = \emptyset$, si ha che $[\sigma, \tau]$ è l'identità.
(b) Non esistono $\sigma, \tau \in S_n$ tali che $[\sigma, \tau]$ è uno scambio.
(c) Per ogni coppia di elementi $\sigma, \tau \in S_n$ tali che $|\operatorname{supp} \sigma \cap \operatorname{supp} \tau| = 1$, si ha che $[\sigma, \tau]$ è un tre-ciclo.

Esercizio 2. Siano G ed H due gruppi. Sia g un elemento di G di periodo finito n e sia h un elemento di H di periodo finito m. Provare che il periodo dell'elemento (g, h) nel prodotto diretto esterno $G \times H$ è $\operatorname{mcm}(n, m)$.

Esercizio 3. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ è ciclico? Se sì, trovare tutti i generatori, altrimenti stabilire se è isomorfo a S_3.

Esercizio 4. (a) Stabilire quali tra i seguenti gruppi sono tra loro isomorfi.

   (a) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.
   (b) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$.
   (c) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$.
   (d) $\mathbb{Z}_{12}$.

(b) Quanti sono, a meno di isomorfismo, i gruppi di ordine 12 che si ottengono come prodotto diretto di un numero finito di gruppi ciclici[1]?

Esercizio 5. Sia G un gruppo finito di ordine 15, e supponiamo che G abbia un sottogruppo normale H di ordine 3 e un sottogruppo normale K di ordine 5.[2]

(a) Provare che G è prodotto diretto interno di H e K.
(b) Provare che G è isomorfo a $\mathbb{Z}_{15}$.

Ultimo aggiornamento: 18 novembre 2019.

[1] Vedremo che questi sono precisamente i gruppi abeliani di ordine 12; infatti ogni prodotto di un numero finito di gruppi ciclici finiti è un gruppo abeliano finito e, viceversa, ogni gruppo abeliano finito è isomorfo a un prodotto di un numero finito di gruppi ciclici finiti.

[2] Vedremo che le ipotesi di esistenza di H e K normali di ordine 3 e 5 in realtà non sono necessarie, in quanto garantite dai teoremi di Sylow. Questo vuol dire che $\mathbb{Z}_{15}$ è, a meno di isomorfismo, l'unico gruppo di ordine 15 (vedi il punto (b)).

Esercizio 6. Per ciascuno dei seguenti gruppi si trovi un gruppo "famoso" a lui isomorfo[3]:

$$\mathrm{Aut}(\{1\}), \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2), \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_3), \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_4), \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2), \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_5), \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_6), \mathrm{Aut}(S_3), \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_7), \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_8).$$

Esercizio 7.

(1) Trovare due sottogruppi non banali A e B di S_3 tali che $S_3 = A \rtimes B$ (prodotto semidiretto interno)[4]. Descrivere il corrispondente omomorfismo $\varphi\colon B \to \mathrm{Aut}(A)$.

(2) Trovare due sottogruppi A e B di $\mathbb{Z}_6$ di cardinalità rispettivamente 3 e 2 tale che $\mathbb{Z}_6 = A \rtimes B$ (prodotto semidiretto interno). Descrivere il corrispondente omomorfismo $\varphi\colon B \to \mathrm{Aut}(A)$.

(3) Descrivere tutti gli omomorfismi $\varphi\colon \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_3)$ e, per ciascuno di questi, trovare un gruppo "famoso" isomorfo al corrispondente prodotto semidiretto $\mathbb{Z}_3 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_2$.

Esercizio 8. Siano G, H, G' e H' gruppi finiti tali che $|G| = |G'|$, $|H| = |H'|$ e $G \times H \simeq G' \times H'$.

(a) Mostrare che, con le date ipotesi, *non* necessariamente si ha $G \simeq G'$.

(b) Dimostrare che, se $|G|$ e $|H|$ sono coprimi, allora $G \simeq G'$ e $H \simeq H'$.

[3] Per gruppi famosi si intendono ad esempio gli $\mathbb{Z}_n$, gli S_n, gli A_n, i D_{2n}, prodotti diretti di questi...

[4] Ricordiamo che <u>il sottogruppo normale è A</u>.