# ESERCIZI TUTORATO ALGEBRA 2
# 6 DICEMBRE 2019 - LEZIONE 8

MARCO ABBADINI

**Esercizio 1** (Seconda prova intermedia, 17 Dicembre 2014, eserc. 4).
Sia $G$ un gruppo di ordine 1000. Si provino le seguenti affermazioni.

(a) $G$ non è un gruppo semplice.
(b) Se $G$ ha un sottogruppo ciclico di ordine $5^3$, allora ogni $5$-sottogruppo di $G$ è caratteristico in $G$.
(c) Se $G$ ha un sottogruppo ciclico di ordine $5^3$, allora $G$ ha elementi di periodo $250$.

**Esercizio 2** (Seconda prova intermedia, 17 Dicembre 2013, eserc. 3).
Sia $G$ un gruppo di ordine $300$. Si provino le seguenti conclusioni.

(a) $G$ non è semplice.
(b) Se $G$ ha un sottogruppo normale ciclico di ordine $25$, allora $G$ ha un sottogruppo normale di ordine $5$.
(c) Se $G$ ha un sottogruppo normale ciclico di ordine $25$, allora $G$ ha un sottogruppo ciclico di ordine $75$.

**Esercizio 3** (Seconda prova intermedia, 17 Dicembre 2015, eserc. 3).

(a) Si trovino, a meno di isomorfismi, tutti i gruppi di ordine $2015$.
(b) Sia $G$ un gruppo di ordine $1016$. Provare che $G$ ha un elemento di ordine $254$. Supponendo poi che $G$ abbia un $2$-sottogruppo di Sylow abeliano, si provi che $\mathbf{Z}(G)$ ha ordine divisibile per $4$, ma si mostri con un esempio che $G$ non ha necessariamente elementi di ordine $508$.

**Esercizio 4** (Prova scritta, 28 Gennaio 2019, eserc. 1).
Siano $n, m$ interi positivi. Consideriamo gli insiemi di numeri naturali $Y_m = \{1, 2, ..., m\}$ e $Y_n = \{1, 2, ..., n\}$, e definiamo

$$X = \{f : Y_m \to Y_n \mid f \text{ applicazione}\}.$$

Sia inoltre $G$ il prodotto diretto $S_m \times S_n$, e consideriamo l'applicazione $X \times G \to X$ definita da

$$(f, (\sigma, \tau)) \mapsto \sigma^{-1} f \tau.$$

(a) Provare che in tal modo resta definita un'azione di $G$ su $X$.
(b) Tale azione è fedele?
(c) Per $n = m = 3$, calcolare le cardinalità delle orbite in cui l'insieme $X$ viene ripartito mediante tale azione.

*Ultimo aggiornamento*: 13 dicembre 2019.

**Esercizio 5** (Prova scritta, 29 Gennaio 2016, eserc. 2)**.**
Sia $G$ un gruppo, e siano $H$ e $K$ sottogruppi di $G$ tali che $G$ sia prodotto diretto (interno) di $H$ e $K$. Provare che $\mathrm{Aut}(H) \times \mathrm{Aut}(K)$ è isomorfo ad un sottogruppo di $\mathrm{Aut}(G)$. Provare poi che, se $H$ e $K$ sono sottogruppi caratteristici di $G$, allora $\mathrm{Aut}(H) \times \mathrm{Aut}(K) \simeq \mathrm{Aut}(G)$.

**Esercizio 6** (Prova scritta, 26 Febbraio 2016, eserc. 3)**.**

(a) Siano $G_1$, $G_2$ gruppi, ed $N_1$, $N_2$ sottogruppi normali rispettivamente di $G_1$ e $G_2$. Provare che
$$\frac{G_1 \times G_2}{N_1 \times N_2} \simeq \frac{G_1}{N_1} \times \frac{G_2}{N_2}.$$
(b) Trovare tre sottogruppi distinti di indice 2 in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. (Sugg.: si applichi il punto precedente con $N_i = 2\mathbb{Z}$.)
(c) Si provi che $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ha esattamente tre sottogruppi di indice $2$.