ESERCIZI TUTORATO ALGEBRA 2
13 DICEMBRE 2019 - LEZIONE 9

MARCO ABBADINI

A lezione faremo qualche esercizio tratto dalle seconde prove intermedie degli anni scorsi, scegliendo tra i seguenti.

Esercizio 1 (Seconda prova intermedia, 17 Dicembre 2013, eserc. 2).
Sia P un p-gruppo finito, e Ω un insieme finito non vuoto. Si provino le seguenti conclusioni.

(a) Se P agisce su Ω, posto $\Phi = \{\omega \in \Omega : \omega \cdot x = \omega \forall x \in P\}$, si ha $|\Phi| \equiv |\Omega| \mod p$.

(b) Se $N \neq 1$ è un sottogruppo normale di P, allora $N \cap \mathbf{Z}(P) \neq 1$. (Sugg.: si applichi il punto precedente all'azione di P per coniugio sugli elementi di N.)

(c) Se N è un sottoruppo normale minimale di P (ovvero $1 \neq N \trianglelefteq G$ e, per ogni $1 \leq K \leq N$ con $K \trianglelefteq G$ si ha $K = 1$ oppure $K = N$), allora si ha $N \leq \mathbf{Z}(P)$ e $|N| = p$.

Esercizio 2 (Seconda prova intermedia, 17 Dicembre 2014, eserc. 1).
Sia G un gruppo di ordine 2015, e sia data una azione di G su un insieme S con $|S| = 20$.

(a) Qual è il minimo numero di orbite in cui S viene ripartito dall'azione di G?

(b) Si può stabilire esattamente il numero di orbite in cui S viene ripartito da G nel caso in cui l'azione sia priva di punti fissi?

Esercizio 3 (Seconda prova intermedia, 17 Dicembre 2015, eserc. 1).
Sia G un gruppo tale che $\mathrm{Aut}(G)$ sia ciclico. Provare che G è abeliano. Si mostri poi con un esempio che se G è abeliano, $\mathrm{Aut}(G)$ non necessariamente lo è.

Esercizio 4 (Seconda prova intermedia, 17 Dicembre 2015, eserc. 3).

(a) Si trovino, a meno di isomorfismi, tutti i gruppi di ordine 2015.

(b) Sia G un gruppo di ordine 1016. Provare che G ha un elemento di ordine 254. Supponendo poi che G abbia un 2-sottogruppo di Sylow abeliano, si provi che $\mathbf{Z}(G)$ ha ordine divisibile per 4, ma si mostri con un esempio che G non ha necessariamente elementi di ordine 508.

Esercizio 5 (Seconda prova intermedia, 21 Dicembre 2016, eserc. 2).
Sia G un gruppo di ordine $315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, e sia S un 3-sottogruppo di Sylow di G.

(a) Supponendo che G sia semplice, determinare $|\mathbf{N}_G(S)|$.

(b) Supponendo che G sia semplice, provare che G ha un elemento di periodo 15. (Sugg.: Si stimi l'ordine di $\mathbf{C}_G(S)$.)

(c) Provare che G non è semplice, derivando una contraddizione dai punti precedenti.

Ultimo aggiornamento: 13 dicembre 2019.

Esercizio 6 (Seconda prova intermedia, 21 Dicembre 2017, eserc. 1)**.**
Classificare tutti i gruppi G di ordine 44. Dire in quali casi esistono elementi di ordine 4 e 22. Calcolare il derivato e il centro di G in tutti i casi.

Esercizio 7 (Seconda prova intermedia, 19 Dicembre 2018, eserc. 2)**.**
Sia G un gruppo di ordine 225.

(a) Provare che G ha un 5-sottogruppo di Sylow normale.
(b) Descrivere i possibili tipi di isomorfismo di G.
(c) Provare che il centro di G ha ordine divisibile per 3.