

# Il cubo di Rubik

Idee per creare una strategia risolutiva

---

Marco Abbadini

5 Dicembre 2019

# Obiettivo del talk

Create le vostre strategie risolutive!



1. Introduzione

2. Risolvere

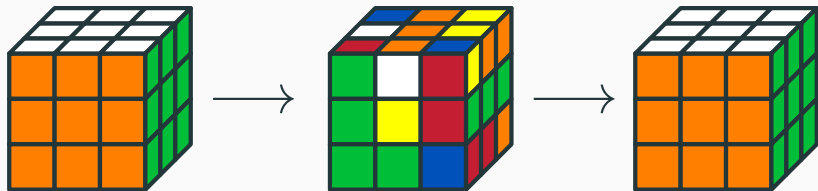
3. Limitazioni

4. Conclusioni

# Introduzione

---

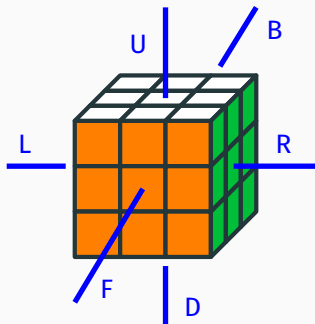
# Come si gioca



# La struttura interna



# Le mosse base



Rotazioni di  $90^\circ$   
in senso *orario*:

- R = Right
- U = Up
- F = Front
- L = Left
- D = Down
- B = Back

*Antiorario*:

- R'
- U'
- F'
- L'
- D'
- B'

*Faccia-mossa* := rotazione di una faccia.

*Macro-mossa* := sequenza di faccia-mosse.

# Centri, vertici, lati



Centri



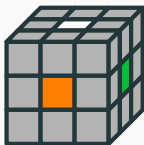
Vertici



Lati



# Centri, vertici, lati



Centri



Vertici



Lati

I cubetti sono tutti diversi.

# Posizioni, orientazioni



Posizione sbagliata



Posizione giusta, orientazione sbagliata



Posizione giusta, orientazione giusta

Risolvere = portare i cubetti nella posizione giusta, con l'orientazione giusta.

Risolvere

---

1. Posiziona tutti i lati nella posizione corretta.
2. Posiziona tutti i vertici nella posizione corretta.
3. Orienta tutti i lati correttamente.
4. Orienta tutti i vertici correttamente.

Come posizionare correttamente i cubetti?

# Posizionare i cubetti

Come posizionare correttamente i cubetti?

Idea: permutare pochi cubetti alla volta.

# Posizionare i cubetti

Come posizionare correttamente i cubetti?

Idea: permutare pochi cubetti alla volta.

Strumento: i commutatori:  $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ .

# I commutatori muovono pochi elementi

R : destra 90° orario.

L' : sinistra 90° antiorario.

R' : destra 90° antiorario.

L : sinistra 90° orario.





## I commutatori muovono pochi elementi

Se  $\alpha$  e  $\beta$  sono due macro-mosse che non muovono alcun cubetto in comune, allora  $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$  non muove alcun cubetto.

# I commutatori muovono pochi elementi

Se  $\alpha$  e  $\beta$  sono due macro-mosse che non muovono alcun cubetto in comune, allora  $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$  non muove alcun cubetto.

Data  $\rho$  una permutazione degli elementi  $1, \dots, n$ , cioè un elemento di  $S_n$ , definiamo il *supporto* di  $\rho$  come gli elementi mossi da  $\rho$ :

$$\text{supp } \rho := \{i \in \{1, \dots, n\} \mid \rho(i) \neq i\}.$$

## Theorem

Siano  $\alpha, \beta \in S_n$  con  $\text{supp } \alpha \cap \text{supp } \beta = \emptyset$ . Allora  $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$  è l'identità.

## I commutatori muovono pochi elementi

Se  $\alpha$  e  $\beta$  muovono esattamente un cubetto in comune, com'è  $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ ?

# I commutatori muovono pochi elementi

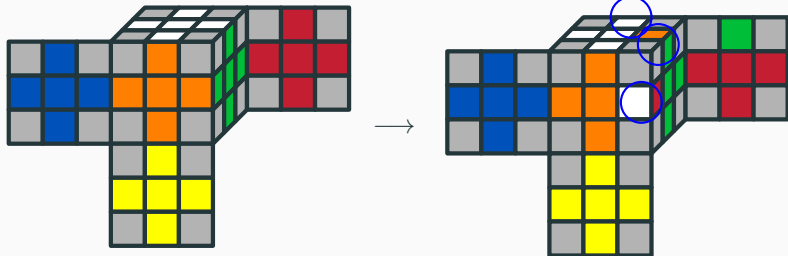
Se  $\alpha$  e  $\beta$  muovono esattamente un cubetto in comune, com'è  $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ ?

$\alpha = \mathbf{R}$  (Right orario)

$\beta = \mathbf{U}$  (Up orario).



$\mathbf{R} \quad \mathbf{U} \quad \mathbf{R}' \quad \mathbf{U}'$



$\gamma := \mathbf{RUR'U'}$  ha come effetto sulla posizione dei lati il 3-ciclo (FR,UR,UB).

# I commutatori muovono pochi elementi

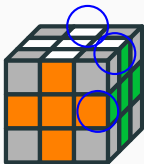
## Theorem

Siano  $\alpha, \beta \in S_n$  con  $|\text{supp } \alpha \cap \text{supp } \beta| = 1$ . Allora  $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$  è un 3-ciclo.

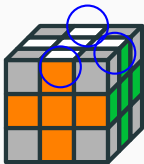
Di solito si pone  $\beta$  come rotazione di una faccia, e si cerca  $\alpha$  macro-mossa tale che  $|\text{supp } \alpha \cap \text{supp } \beta| = 1$ .

# Coniugio

$\gamma := \mathbf{RUR'U'}$  ha come effetto sulla posizione dei lati il 3-ciclo (FR,UR,UB).

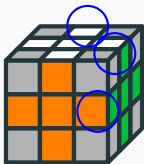


Come ciclare i 3 lati UF, UR, UB?

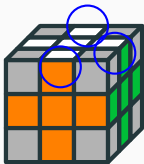


# Coniugio

$\gamma := \mathbf{RUR'U'}$  ha come effetto sulla posizione dei lati il 3-ciclo (FR,UR,UB).



Come ciclare i 3 lati UF, UR, UB?



$$F_{\gamma}F' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{↺} & \text{↑↑} & \text{⇐} & \text{↓↓} & \text{⇒} & \text{↻} \\ \hline \end{array} \\ F \quad R \quad U \quad R' \quad U' \quad F'$$

# Posizionare i cubetti: riepilogo

Come posizionare correttamente i cubetti?

Commutatore  $\longrightarrow$  3-ciclo.

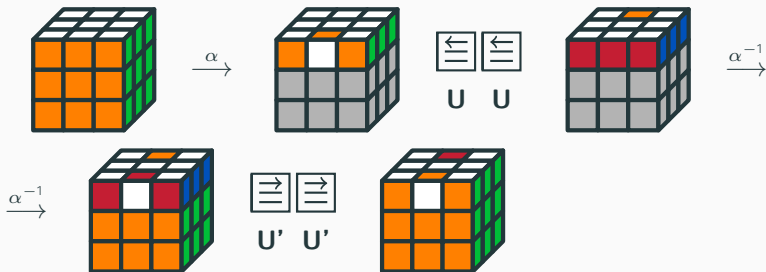
Ottenuto un particolare 3-ciclo, ne ottengo altri coniugandolo.



# Orientare i cubetti



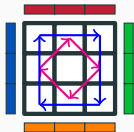
# Orientare i cubetti



## Limitazioni

---

C'è qualche mossa che scambia due cubetti? No.



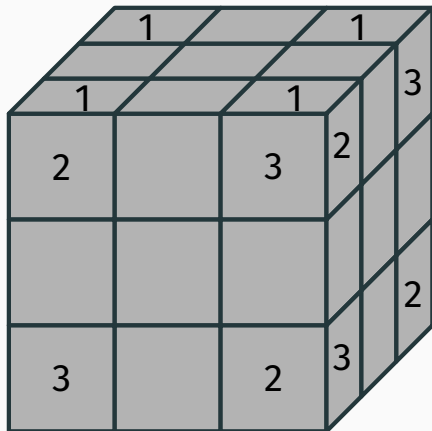
Ogni faccia-mossa è una permutazione dispari delle posizioni dei vertici e una permutazione dispari delle posizioni dei lati. Complessivamente, è pari.

Limitazione 1: ogni macro-mossa è una permutazione pari delle posizioni.

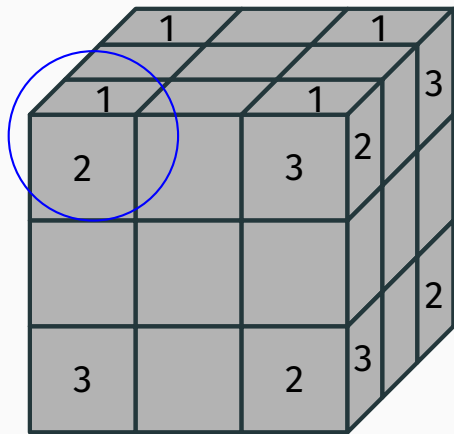
Esiste una mossa che ha come unico effetto la rotazione di un vertice?

No.

## Limitazione sulle orientazioni

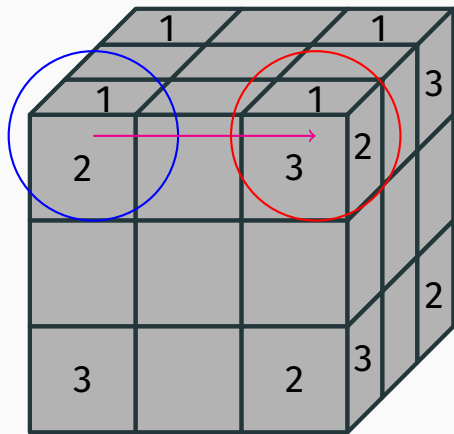


## Limitazione sulle orientazioni




Consideriamo il cubetto in posizione UFR.

## Limitazione sulle orientazioni



Consideriamo il cubetto in posizione UFR.

Come viene mandato il cubetto in posizione UFR dalla mossa **F**  (Front orario) nella posizione RFU?

$1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 1$ , cioè abbiamo il 3-ciclo  $(1, 2, 3) \in A_3$ .



Numerando i vertici con 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, otteniamo

$$(v_1(\mathbf{F}), v_2(\mathbf{F}), v_3(\mathbf{F}), v_4(\mathbf{F}), v_5(\mathbf{F}), v_6(\mathbf{F}), v_7(\mathbf{F}), v_8(\mathbf{F})) \in (A_3)^8.$$

Al posto di  $\mathbf{F}$  si può considerare una qualsiasi macro-mossa  $\alpha$ .  
Abbiamo

$$(v_1(\alpha), v_2(\alpha), v_3(\alpha), v_4(\alpha), v_5(\alpha), v_6(\alpha), v_7(\alpha), v_8(\alpha)) \in (A_3)^8.$$

# Limitazione sulle orientazioni

Sia  $G$  il gruppo delle macro-mosse.

$$f: G \longrightarrow A_3$$
$$\alpha \longmapsto \prod_{i=1}^8 v_i(\alpha).$$

- $f$  è un omomorfismo.
- Per ogni faccia-mossa  $\rho$ , si ha  $f(\rho) = \text{Id}$ .

Quindi  $f$  è l'omomorfismo banale.

Limitazione 2: per ogni macro-mossa  $\alpha$ , si ha  $\prod_{i=1}^8 v_i(\alpha) = \text{Id}$ .

Limitazione 3: condizione analoga per i lati (con  $S_2$  al posto di  $A_3$ ).

Limitazioni per una macro-mossa  $\alpha$ .

1.  $\alpha$  è una permutazione pari.
2.  $\prod_{i=1}^8 v_i(\alpha) = \text{Id}_{\{1,2,3\}}$ .
3.  $\prod_{i=1}^{12} l_i(\alpha) = \text{Id}_{\{1,2\}}$ .

Queste sono le uniche limitazioni.

# Conclusioni

---

Per risolvere:

1. Commutatori per spostare/orientare pochi cubetti.
2. Coniugio per ottenere mosse simili.

Per scoprire vincoli:

1. Per posizioni: parità.
2. Per orientazioni: omomorfismi verso gruppi ciclici.

Grazie per l'attenzione!