ESERCIZI TUTORATO ALGEBRA 2
11 OTTOBRE 2019 - LEZIONE 1

MARCO ABBADINI

Di seguito si trovano le soluzioni degli esercizi svolti in classe. Non sono soluzioni complete, ma solo dei veloci riassunti.

Esercizio 1. Si scriva il ciclo $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)$ appartenente al gruppo simmetrico S_4 come prodotto di scambi.

Soluzione. $\sigma = (1\ 2)(1\ 3)(1\ 4)$, per esempio.

Esercizio 2. Nel gruppo simmetrico S_7, si consideri la permutazione

$$\begin{aligned} \sigma\colon \{1,\dots,7\} &\to \{1,\dots,7\} \\ 1 &\mapsto 5 \\ 2 &\mapsto 7 \\ 3 &\mapsto 3 \\ 4 &\mapsto 1 \\ 5 &\mapsto 4 \\ 6 &\mapsto 6 \\ 7 &\mapsto 2 \end{aligned}$$

(a) Si scriva la decomposizione in cicli disgiunti di σ, σ^2 e σ^3.
(b) Si determini il periodo di σ in S_7.

Soluzione. (a) $\sigma = (1\ 5\ 4)(2\ 7)$. $\sigma^2 = (1\ 4\ 5)$. $\sigma^3 = (2\ 7)$.
(b) Periodo$=\mathrm{mcm}(3, 2) = 6$.

Esercizio 3 (Prova scritta, 28 Aprile 2017, eserc. 2)**.** Provare che $\mathrm{Sym}(\Omega)$ è un gruppo abeliano se e solo se $|\Omega| \leq 2$.

Soluzione. Proviamo che se $|\Omega| \geq 3$ allora $\mathrm{Sym}(\Omega)$ non è abeliano. Siano $x, y, z \in \Omega$ distinti. Sia $\sigma \in \mathrm{Sym}(\Omega)$ che lascia fissi tutti gli elementi eccetto x e y, che vengono scambiati. Sia $\rho \in \mathrm{Sym}(\Omega)$ che lascia fissi tutti gli elementi eccetto y e z, che vengono scambiati. Allora $\sigma\tau \neq \tau\sigma$, poichè $\sigma\tau$ manda x in z, mentre $\tau\sigma$ manda x in y. L'altra direzione si risolve per casi.

Esercizio 4. Definiamo

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \ :\ a, b, d \in \mathbb{R},\ ad \neq 0 \right\},$$

Ultimo aggiornamento: 28 ottobre 2019. Non esitate a segnalare eventuali errori a marco.abbadini@unimi.it.

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;:\; b \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;:\; a, b \in \mathbb{Z}_3, a \neq 0 \right\}$$

(a) Provare che H, M ed L sono sottogruppi di $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ e $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_3)$, rispettivamente.

(b) Stabilire se H, M ed L sono ciclici.

Soluzione. (a) Si mostri che contengono la matrice identica, che sono chiusi per prodotto e per inversi.

(b) H non è ciclico perchè ha cardinalità strettamente più grande del numerabile. M è ciclico: è generato da $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. L non è ciclico, poichè $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non commutano.

Esercizio 5 (Primo compitino, 19 Novembre 2015, eserc. 3)**.** Sia n un intero positivo, e sia $\sigma \in S_n$ un ciclo di lunghezza k. Determinare il tipo di σ^2.

Soluzione. Se k è dispari, σ^2 è un k-ciclo. Se k è pari, σ^2 è un prodotto di due $\frac{k}{2}$-cicli disgiunti.

Cosa ricordare

- Il periodo di un elemento di S_n di tipo $(m_1, \ldots, m_k)$ è $\mathrm{mcm}(m_1, \ldots, m_k)$. (Esercizio 2.)
- Se $|\Omega| \geq 3$, allora $\mathrm{Sym}(\Omega)$ non è abeliano. (Esercizio 3.)
- Per verificare che H è un sottogruppo di G bisogna far vedere
  (1) $H \subseteq G$ (in alcuni casi ciò è scontato e non è necessario verificarlo).
  (2) H è non vuoto (una scelta sicura è far vedere che l'elemento neutro appartiene ad H).
  (3) H è chiuso per prodotto.
  (4) H è chiuso per inversi (se H è finito, questa verifica non è necessaria).
  (Esercizio 4.)