ESERCIZI TUTORATO ALGEBRA 2
8 NOVEMBRE 2019 - LEZIONE 4
SOLUZIONI

MARCO ABBADINI

Di seguito si trovano le soluzioni degli esercizi svolti in classe. Non sono soluzioni complete, ma solo dei veloci riassunti.

Esercizio 1 (Prova scritta, 26 Febbraio 2016, eserc. 1)**.**
Sia G un gruppo finito. Determinare tutti i possibili omomorfismi di G in $\mathbb{Z}$.

Soluzione. L'unico omomorfismo è l'omomorfismo banale, che manda ogni elemento di G in 0. Infatti l'immagine di un omomorfismo è un sottogruppo, e perciò l'immagine di un omomorfismo $\varphi\colon G \to \mathbb{Z}$ è un sottogruppo finito di $\mathbb{Z}$. L'unico sottogruppo finito di $\mathbb{Z}$ è $\{0\}$.

Soluzione alternativa. L'unico omomorfismo è l'omomorfismo banale, che manda ogni elemento di G in 0. Infatti ogni elemento $g \in G$ ha periodo finito, e perciò la sua immagine attraverso un omomorfismo ha periodo finito. L'unico elemento di $\mathbb{Z}$ con periodo finito è 0.

Esercizio 2 (Prova scritta, 17 Luglio 2015, eserc. 1)**.** Sia G un gruppo abeliano, e sia n un intero positivo. Si considerino gli insiemi $G_1 = \{g \in G \ : \ g^n = 1\}$, e $G_2 = \{g^n \ : \ g \in G\}$. Provare che G_1 e G_2 sono sottogruppi normali di G, e che $G/G_1 \simeq G_2$.

Soluzione. Si definisca

$$\begin{aligned} \phi\colon G &\to G \\ g &\mapsto g^n \end{aligned}$$

La funzione ϕ è un omomorfismo con nucleo G_1 e immagine G_2. Ne segue che G_1 è un sottogruppo normale di G, G_2 è un sottogruppo di G, e, per il teorema di isomorfismo, $G/G_1 \cong \operatorname{Im}\phi = G_2$. Poichè G è abeliano, G_2 è normale.

Nota: l'abelianità di G si usa per dimostrare che ϕ è un omomorfismo, e che G_2 è normale.

Esercizio 3 (Prima prova intermedia, 19 Novembre 2013, eserc. 3)**.**
Sia ϕ un omomorfismo definito su un gruppo finito G, e sia H un sottogruppo di G. Provare che:
(a) $|\phi(G) : \phi(H)|$ divide $|G : H|$.
(b) $|\phi(H)|$ divide $|H|$.

Soluzione. (a) Per il teorema di corrispondenza, $|\phi(G) : \phi(H)| = |\phi^{-1}(\phi(G)) : \phi^{-1}(\phi(H))| = |G : \phi^{-1}(\phi(H))|$. Poichè $H \leq \phi^{-1}(\phi(H)) \leq G$, si ha $|G : H| = |G : \phi^{-1}(\phi(H))| \cdot |\phi^{-1}(\phi(H)) : H|$. Perciò $|G : \phi^{-1}(\phi(H))|$ $(=|\phi(G) : \phi(H)|)$ divide $|G : H|$.

Ultimo aggiornamento: 10 novembre 2019. Non esitate a segnalare eventuali errori a marco.abbadini@unimi.it.

(b) Denotando con K il codominio di ϕ, consideriamo la composizione $H \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\phi} K$. Questa, ristretta a codominio, dà un omomorfismo suriettivo $\psi\colon H \to \phi(H)$. Allora, per il teorema di isomorfismo, $\phi(H) \cong H/\ker\psi$. Per Lagrange, la cardinalità di quest'ultimo divide $|H|$.

Esercizio 4 (Prova scritta 17 Giugno 2015, eserc. 3)**.** Sia N un sottogruppo normale di un gruppo finito G. Mostrare che se H è un sottogruppo di G di ordine coprimo con $|G/N|$, allora $H \leq N$.

Soluzione. Consideriamo il quoziente

$$\begin{aligned}\pi\colon G &\to G/N\\ g &\mapsto gN.\end{aligned}$$

Questo è un omomorfismo suriettivo con nucleo N. Per (b) nell'Esercizio 3, $|\pi(H)|$ divide $|H|$. Poichè $\pi(H) \leq G/N$, si ha che $|\pi(H)|$ divide $|G/N|$. Dalle tre informazioni

(1) $|\pi(H)|$ divide $|H|$;
(2) $|\pi(H)|$ divide $|G/N|$;
(3) $\mathrm{MCD}\,(|H|, |G/N|) = 1$;

segue $|\pi(H)| = 1$. Cioè $\pi(H)$ è il sottogruppo banale di G/N, quindi $H \subseteq \ker\pi = N$, quindi $H \leq N$.

Soluzione alternativa, suggerita da uno studente. Consideriamo il quoziente

$$\begin{aligned}\pi\colon G &\to G/N\\ g &\mapsto gN.\end{aligned}$$

Questo è un omomorfismo. Per ogni $g \in H$, si ha

(1) il periodo di $\pi(g)$ divide il periodo di g, il quale divide $|H|$; perciò il periodo di $\pi(g)$ divide $|H|$.
(2) il periodo di $\pi(g)$ divide $|G/N|$.
(3) $\mathrm{MCD}\,(|H|, |G/N|) = 1$ (per ipotesi).

Da (1), (2) e (3) segue che $\pi(g)$ ha ordine 1, da cui segue $H \subseteq \ker\pi = N$.

Esercizio 5 (Prova scritta, 28 Aprile 2015, eserc. 1)**.**
Sia G un gruppo finito e siano H e K sottogruppi di G tali che $|G| < |H|^2$ e $|G| < |K|^2$. Provare che si ha $H \cap K \neq 1$.

Soluzione. Dalle ipotesi segue $|G| < |H||K|$. Poichè $|HK| = \frac{|H||K|}{|H\cap K|}$, se per assurdo fosse $H \cap K = 1$, allora si avrebbe $|HK| = \frac{|H||K|}{|H\cap K|} = |H||K| > |G|$, che è in contraddizione con $HK \subseteq G$.

Esercizio 6. Definiamo

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \;:\; a, b, d \in \mathbb{R},\ ad \neq 0 \right\},$$

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;:\; b \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Provare che H ed L sono sottogruppi di $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.
(b) L è normale in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$?
(c) H è normale in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$?
(d) Provare che L è normale in H.

(e) Provare che L è isomorfo a $(\mathbb{R},+)$.

(f) Determinare un insieme di rappresentanti dei laterali di L in H[1], e, per ogni rappresentante, descrivere il laterale corrispondente. Dimostrare che H/L è isomorfo a $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, dove $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e l'operazione di gruppo su $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ è definita dal prodotto coordinata per coordinata: $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \coloneqq (x_1x_2, y_1y_2)$. H/L è abeliano? È ciclico?

Soluzione. Si provi (a).

Per quanto riguarda (b) e (c), dimostriamo che L e H non sono normali in $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$. Infatti, il coniugio di una matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ per $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Prendendo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ si mostra che né H né L sono normali in $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$; ciò risolve (b) e (c).

Per provare (d) si mostri che, per ogni $M \in H$ e ogni $N \in L$, si ha $M^{-1}NM \in L$. (Oppure si faccia vedere che è il nucleo di un omomorfismo con dominio H, così come verrà stabilito in (f).)

La funzione $b \mapsto \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è un isomorfismo e ciò risolve (e).

Per quanto riguarda (f), un insieme di rappresentanti dei laterali di L in H è $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$. Dati $a, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, il laterale $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} L$ è $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. b \in \mathbb{R} \right\}$.

Per dimostrare che H/L è isomorfo a $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, si definisca

$$\begin{aligned} \varphi \colon H &\to \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \\ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} &\mapsto (a, d). \end{aligned}$$

Questo è un omomorfismo suriettivo con nucleo L. Per il teorema di isomorfismo, segue $H/L \cong \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

$\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ è abeliano, poiché prodotto di abeliani. $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ non è ciclico, poiché di cardinalità strettamente maggiore del numerabile (oppure: perchè infinito e ogni elemento è divisibile per due (notazione additiva)).

(Nota: i laterali sono esattamente le "fibre" di φ, cioè le contrimmagini attraverso φ di singoletti di $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$. Infatti, un modo alternativo per scoprire quali sono i laterali era guardare le fibre di φ.)

Nota. Ecco una dimostrazione alternativa del fatto che H/L è isomorfo a $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, suggerita da uno studente. Partiamo dal presupposto che sappiamo già che L è normale e che un insieme di rappresentanti dei laterali di L in H è $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, d \in \mathbb{R}^* \right\}$. Definiamo la funzione $\psi \colon H \to \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$[2] che, per ogni $a, d \in \mathbb{R}^*$, associa a $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} L$ l'elemento (a, d). Questa è una funzione ben definita, poichè $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, d \in \mathbb{R}^* \right\}$ è un insieme di rappresentanti dei laterali di L in H. Sempre per lo stesso motivo è biiettiva. Mostriamo che è un

[1] Per "insieme di rappresentanti dei laterali di L in H" si intende un insieme $X \subseteq G$ tale per cui, per ogni laterale A di L in H, esiste ed è unico un elemento $x \in X$ tale che $x \in A$.

[2] Anche la funzione inversa da $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ a H andrebbe bene.

omomorfismo. Siano $a, d, a', d' \in \mathbb{R}^*$. Allora

$$\psi\left(\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} L\right) \cdot \left(\begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & d' \end{pmatrix} L\right)\right) = \psi\left(\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & d' \end{pmatrix}\right) L\right) = \tag{1}$$

$$= \psi\left(\begin{pmatrix} aa' & 0 \\ 0 & dd' \end{pmatrix} L\right) = \tag{2}$$

$$= (aa', dd') = \tag{3}$$

$$= (a, a')(d, d') = \tag{4}$$

$$= \psi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} L\right) \cdot \psi\left(\begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & d' \end{pmatrix} L\right). \tag{5}$$

Perciò ψ è un isomorfismo da H/L a $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

Il successo di questo metodo è dovuto al fatto che, come insieme di rappresentanti dei laterali di L in H, si è scelto un insieme chiuso per prodotto. Si noti, infatti, come questo è tornato comodo nel passaggio da (1) a (2). Si osservi che non è vero che ogni insieme di rappresentanti dei laterali di L in H è chiuso per prodotto; inoltre, in generale non è detto che sia possibile trovarne uno, cioè esiste un gruppo G che ha un sottogruppo normale K tale che non esiste alcun insieme di rappresentanti dei laterali di K in G che sia chiuso per prodotto (esercizio).

Però, in questo caso siamo fortunati: abbiamo trovato un insieme X di rappresentanti dei laterali di L in H è chiuso per prodotto, e ciò ci ha permesso di usare X agevolmente.

Si può dimostrare il seguente:

Fatto 1. Sia G un gruppo, N un suo sottogruppo normale, e sia $H \subseteq G$. Se H è un insieme di rappresentanti dei laterali di N in G, e H è chiuso per prodotto, allora H è un sottogruppo di G, ed inoltre $H \cong G/N$, come testimoniato dalla composizione $H \overset{\iota}{\hookrightarrow} G \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} G/N$.

Fatto 1, applicato al nostro caso, dice che $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, d \in \mathbb{R}^*\right\}$ è un sottogruppo di H, ed è isomorfo a H/L. (Da questo segue immediatamente che H/L è isomorfo a $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.)

Le ipotesi del Fatto 1 sono equivalenti a delle condizioni più famose:

Fatto 2. Sia G un gruppo, N un suo sottogruppo normale, e sia $H \subseteq G$. Le seguenti condizioni sono equivalenti.

(1) H è un insieme di rappresentanti dei laterali di N in G, ed è chiuso per prodotto.
(2) H è un sottogruppo di G, $H \cap N = \{1\}$ e $G = HN$.

Infatti, come si vedrà a lezione, la condizione (2) nel Fatto 2 è la condizione definitoria di *prodotto semidiretto*, cioè

Definizione 1. Sia G un gruppo, e siano H e N sottogruppi di G. Diciamo che G è *prodotto semidiretto* di H per N se $G = HN$, $N \trianglelefteq G$, e $H \cap N = \{1\}$.

(Nota che se anche H è normale si ha un prodotto diretto.)

Ricapitolando: dato un gruppo G e un suo sottogruppo normale N, se esiste un insieme H di rappresentanti dei laterali di N in G che sia chiuso per prodotto, allora H è un sottogruppo e G/N è isomorfo ad H; inoltre questa situazione è molto studiata e prende il nome di *prodotto semidiretto*.

1. Cosa ricordare

- Dato un omomorfismo di gruppi $\varphi\colon G \to H$, si ha che $\operatorname{Im}\varphi$ è un sottogruppo di H. (Esercizi 1 e 2.)
- Dato un omomorfismo di gruppi $\varphi\colon G \to H$, e dato $g \in G$, se g ha periodo finito, allora $\varphi(g)$ ha periodo finito (in particolare $o(\varphi(g))$ divide $o(g)$). (Esercizio 1.)

- Se G è un gruppo abeliano allora, per ogni $g, h \in G$ e $n \in \mathbb{Z}$, si ha $(gh)^n = g^n h^n$. (Esercizio 2.)
- Ogni sottogruppo di un gruppo abeliano è normale. (Esercizio 2.)
- Il nucleo di un omomorfismo $\varphi\colon G \to H$ è un sottogruppo normale di G. (Esercizio 2.)
- Quando vediamo la richiesta "mostrare che G/N è isomorfo a H", la prima strategia a cui pensare è "trovare un omomorfismo suriettivo da G ad H con nucleo N". (vedi "teorema di isomorfismo" sotto.) (Esercizi 2 e 6.)
- Si ricordi il "Teorema di isomorfismo" (anche detto "teorema di omomorfismo" o "primo teorema di omomorfismo".) nella versione di uso quotidiano: "Dato $\varphi\colon G \to H$ omomorfismo di gruppi suriettivo, si ha $H \cong G/\ker\varphi$." (Esercizi 2 e 6.)
- Si ricordi il "Teorema di isomorfismo" nella versione più dettagliata: "Dato $\varphi\colon G \to H$ omomorfismo di gruppi, esiste un'unica funzione $f\colon G/\ker\varphi \to H$ che fa commutare il seguente triangolo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & H \\ G/N \arrow[ur, dashed, "\exists! f"'] & \end{tikzcd}$$

(cioè: $f(gN) = \varphi(g)$). Inoltre f è un omomorfismo iniettivo." Conseguenze immediate sono: f è suriettiva se e solo se φ è suriettiva; la restrizione di f a codominio è un isomorfismo tra G/N e $\operatorname{Im}\varphi$. (Esercizi 2 e 6.)
- Teorema di corrispondenza: "Sia $\varphi\colon G \to H$ omomorfismo di gruppi suriettivo. Si ponga $N := \ker\varphi$, $\mathcal{S} := \{U \leq G \mid U \supseteq N\}$ e $\mathcal{T} := \{V \leq H\}$. Allora $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ sono in biiezione, attraversa la funzione

$$\begin{aligned} \varphi_*\colon \mathcal{S} &\to \mathcal{T} \\ U &\mapsto \varphi(U), \end{aligned}$$

la cui inversa è

$$\begin{aligned} \varphi^*\colon \mathcal{T} &\to \mathcal{S} \\ V &\mapsto \varphi^{-1}(V). \end{aligned}$$

Questa biezione conserva: inclusioni, indici, normalità e quozienti. Ovvero, siano $U_1, U_2 \in \mathcal{S}$, $V_1 := \varphi(U_1)$ e $V_2 := \varphi(U_2)$; allora
  (a) $U_1 \subseteq U_2 \Leftrightarrow V_1 \subseteq V_2$;
  (b) Nel caso $U_1 \subseteq U_2$, allora $|U_2 : U_1| = |V_2 : V_1|$;
  (c) $U_1 \trianglelefteq U_2 \Leftrightarrow V_1 \trianglelefteq V_2$;
  (d) Nel caso (c), vale $U_2/U_1 \cong V_2/V_1$." (Esercizio 3.)
- Sia G un gruppo finito, sia K un gruppo, sia $\phi\colon G \to K$ un omomorfismo di gruppi e sia $H \leq G$. Allora $|\phi(H)|$ divide $|H|$. (Esercizio 3.)
- La mappa quoziente $\pi\colon G \to G/N$ è un omomorfismo suriettivo con nucleo N. (Esercizio 4.)
- Sia G un gruppo finito, e H un suo sottogruppo. Allora $|H|$ divide $|G|$ (per il Teorema di Lagrange). (Esercizio 4.)
- Sia G un gruppo e H e K due suoi sottogruppi. Allora $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$. (Esercizio 5.)
- Negli esercizi con le matrici, spesso capita di dover dimostrare che un certo sottogruppo H di $\mathrm{GL}(2, \mathbb{K})$ non è normale. In tal caso, spesso il coniugio per $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mostra la non-normalità. Si ricordi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Spesso funzione prendere $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (Esercizio 6.)

- Prodotto diretto di gruppi abeliani è abeliano. (Esercizio 6.)