ESERCIZI TUTORATO ALGEBRA 2
6 DICEMBRE 2019 - LEZIONE 7

MARCO ABBADINI

Di seguito si trovano le soluzioni degli esercizi svolti in classe. Non sono soluzioni complete, ma solo dei veloci riassunti.

Esercizio 1. Sia G un gruppo di ordine $3 \cdot 5^2 \cdot 13 = 975$. Utilizzando i teoremi di Sylow, si stabilisca quanti sottogruppi di G di ordine 25 esistono e se sono normali.

Soluzione. Denotiamo con $\mathrm{Syl}_5(G)$ l'insieme dei sottogruppi di G di ordine 25. Per i teoremi di Sylow, abbiamo quanto segue.

- $|\mathrm{Syl}_5(G)|$ divide $3 \cdot 13$. Perciò $|\mathrm{Syl}_5(G)| \in \{1, 3, 13, 39\}$.
- $|\mathrm{Syl}_5(G)| \equiv 1 \mod 5$. Combinando con quanto sopra, si ottiene Perciò $|\mathrm{Syl}_5(G)| = 1$.

Quindi c'è esattamente un sottogruppo di G di ordine 25. Ciò implica che tale sottogruppo è normale. (Per ogni p-sottogruppo P di un gruppo finito H, esso è normale se e solo se è l'unico p-sottogruppo di H)

Esercizio 2. Si mostri che ogni gruppo di ordine $5 \cdot 7 = 35$ è ciclico.

Soluzione. Fatto: se G ha ordine pq, con p e q primi tali che $p < q$ e $p \not| q - 1$, allora G è ciclico.

Se non ci si ricorda il precedente fatto, si può procedere come segue (che è come si dimostra il precedente fatto).

Sia G un gruppo di ordine 35. Per i teoremi di Sylow, $|\mathrm{Syl}_5(G)|$ divide 7 ed è congruo a 1 modulo 5. Perciò $|\mathrm{Syl}_5(G)| = 1$, cioè c'è esattamente un sottogruppo H di ordine 5. Si deduce che questo è normale. Per i teoremi di Sylow, $|\mathrm{Syl}_7(G)|$ divide 5 ed è congruo a 1 modulo 7. Perciò $|\mathrm{Syl}_7(G)| = 1$, cioè c'è esattamente un sottogruppo K di ordine 7. Si deduce che questo è normale. Inoltre $H \cap K = 1$ e $HK = G$ (poichè 5 e 7 sono coprimi). Perciò G è prodotto diretto interno di H e K. Perciò G è isomorfo al prodotto diretto esterno $H \times K$. H è ciclico perchè ha ordine primo. K è ciclico perchè ha ordine primo. Poichè prodotto di ciclici di ordini coprimi è ciclico, G è ciclico.

Esercizio 3. Classificare, a meno di isomorfismo, i gruppi di ordine 9.

Soluzione. G ha ordine il quadrato di un primo, quindi è abeliano. Sfruttando la classificazione dei gruppi abeliani finiti, G è isomorfo ad uno dei seguenti gruppi (non isomorfi tra loro): $\mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

Esercizio 4. Classificare, a meno di isomorfismo, i gruppi di ordine $5^2 \cdot 7 = 175$.

Ultimo aggiornamento: 6 dicembre 2019. Non esitate a segnalare eventuali errori a marco.abbadini@unimi.it.

Soluzione. Sia G un gruppo di ordine 175.

Per i teoremi di Sylow, $|\mathrm{Syl}_5(G)|$ divide 7 ed è congruo a 1 modulo 5. Perciò $|\mathrm{Syl}_5(G)| = 1$, cioè c'è esattamente un sottogruppo H di ordine $5^2 = 25$. Si deduce che questo è normale. Inoltre è abeliano, poichè quadrato di un primo. Perciò H è isomorfo a $\mathbb{Z}_{25}$ oppure a $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ (questi due non sono isomorfi).

Per i teoremi di Sylow, $|\mathrm{Syl}_7(G)|$ divide 5^2 ed è congruo a 1 modulo 7. Perciò $|\mathrm{Syl}_7(G)| = 1$, cioè c'è esattamente un sottogruppo K di ordine 7. Si deduce che questo è normale. K è ciclico poichè di ordine primo.

Inoltre $H \cap K = 1$ e $HK = G$ (poichè 5 e 7 sono coprimi). Perciò G è prodotto diretto interno di H e K. Perciò G è isomorfo a $H \times K$. Perciò G è isomorfo a $\mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_7 \cong \mathbb{Z}_{175}$ oppure a $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7 \cong \mathbb{Z}_{35} \times \mathbb{Z}_5$ (questi due gruppi non sono isomorfi tra loro).

Esercizio 5. Classificare, a meno di isomorfismo, i gruppi abeliani di ordine 24.

Soluzione. $\mathbb{Z}_{24}$, $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (questi sono non isomorfi tra loro).

Esercizio 6. Classificare, a meno di isomorfismo, i gruppi abeliani di ordine 16.

Soluzione. $\mathbb{Z}_{16}$, $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

1. Cosa ricordare

- Alla richiesta "classificare i gruppi G di ordine n", spesso la soluzione è questa: si scompone n in prodotto di potenze di primi distinti, ad esempio $n = p^k q^j$. Con i teoremi di Sylow si ottiene che c'è esattamente un p-sottogruppo H di Sylow e un q-sottogruppo K di Sylow. Si deduce che sono normali. Si deduce che G è isomorfo al prodotto diretto di H e K. Per capire come sono fatti H e K: spesso hanno ordine primo (e quindi sono ciclici), oppure quadrato di un primo (e quindi abeliani, perciò prodotto di ciclici). (Esercizi 2, 4.)
- (Teoremi di Sylow) Dato G un gruppo finito e dato p un primo che divide $|G|$, si scriva $|G| = p^\alpha m$, con $p \nmid m$. Allora
  (1) $|\mathrm{Syl}_p(G)|$ divide m.
  (2) $|\mathrm{Syl}_p(G)| \equiv 1 \mod p$.

  Inoltre, un p-sottogruppo di G è normale se e solo se $|\mathrm{Syl}_p(G)| = 1$. (Esercizi 1, 2, 4.)
- Ogni gruppo abeliano finito è prodotto di gruppi ciclici. (Esercizi 3, 4, 5, 6.)
- Ogni gruppo di ordine quadrato di un primo è abeliano. (Esercizi 3, 4).