ALGEBRA 2 - SECONDE PROVE INTERMEDIE
2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018

1. Seconda prova intermedia 2013

Esercizio 1.1 (Seconda prova intermedia, 17 Dicembre 2013, eserc. 1)**.**
Sia G un gruppo, e A, B due sottogruppi di G tali che $G = AB$. Provare che, per ogni x, y in G, si ha $G = A^x B^y$.

Esercizio 1.2 (Seconda prova intermedia, 17 Dicembre 2013, eserc. 2)**.**
Sia P un p-gruppo finito, e Ω un insieme finito non vuoto. Si provino le seguenti conclusioni.

(a) Se P agisce su Ω, posto $\Phi = \{\omega \in \Omega : \omega \cdot x = \omega \forall x \in P\}$, si ha $|\Phi| \equiv |\Omega| \mod p$.

(b) Se $N \neq 1$ è un sottogruppo normale di P, allora $N \cap \mathbf{Z}(P) \neq 1$. (Sugg.: si applichi il punto precedente all'azione di P per coniugio sugli elementi di N.)

(c) Se N è un sottoruppo normale minimale di P (ovvero $1 \neq N \trianglelefteq G$ e, per ogni $1 \leq K \leq N$ con $K \trianglelefteq G$ si ha $K = 1$ oppure $K = N$), allora si ha $N \leq \mathbf{Z}(P)$ e $|N| = p$.

Esercizio 1.3 (Seconda prova intermedia, 17 Dicembre 2013, eserc. 3)**.**
Sia G un gruppo di ordine 300. Si provino le seguenti conclusioni.

(a) G non è semplice.

(b) Se G ha un sottogruppo normale ciclico di ordine 25, allora G ha un sottogruppo normale di ordine 5.

(c) Se G ha un sottogruppo normale ciclico di ordine 25, allora G ha un sottogruppo ciclico di ordine 75.

2. Seconda prova intermedia 2014

Esercizio 2.1 (Seconda prova intermedia, 17 Dicembre 2014, eserc. 1).
Sia G un gruppo di ordine 2015, e sia data una azione di G su un insieme S con $|S| = 20$.

(a) Qual è il minimo numero di orbite in cui S viene ripartito dall'azione di G?

(b) Si può stabilire esattamente il numero di orbite in cui S viene ripartito da G nel caso in cui l'azione sia priva di punti fissi?

Esercizio 2.2 (Seconda prova intermedia, 17 Dicembre 2014, eserc. 2).
Sia data un'azione transitiva del gruppo G sull'insieme Ω e sia $N \trianglelefteq G$. Per ogni $x \in \Omega$ denotiamo con xN l'orbita di x sotto l'azione ristretta ad N, e indichiamo con Γ l'insieme di tutte le N-orbite su Ω.

(a) Si prove che ponendo, per ogni $xN \in \Gamma$ ed ogni $g \in G$,
$$(xN) \cdot g = (x \cdot g)N$$
si definisce un'azione di G su Γ.

(b) Si provi che l'azione di G su Γ definita al punto (a) è transitiva.

(c) Si provi che tutte le orbite di N su Ω hanno la stessa cardinalità.

Esercizio 2.3 (Seconda prova intermedia, 17 Dicembre 2014, eserc. 3).
Sia $\mathbb{C}^*$ il gruppo moltiplicativo dei numeri complessi diversi da zero, e per ogni numero naturale $n \geq 1$, sia $U_n = \{z \in \mathbb{C}^* \mid z^n = 1\}$ l'insieme delle radici n-esime dell'unità.

(a) Si provi che, per ogni n, U_n è un sottogruppo di C^*.

(b) Si dimostri che, per ogni n, m, $U_n \leq U_m$ se e solo se $n \mid m$; in tal caso si determini l'indice $U_m : U_n$.

(c) Si dimostri che, per ogni n, il gruppo quoziente C^*/U_n è isomorfo a C^*. (Sugg.: si consideri l'applicazione $f(x) = x^n$ di C^* in sè.)

(d) Posto
$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n,$$
si dimostri che U è un sottogruppo di $\mathbb{C}^*$, e che $\mathbb{C}^*/U$ non è isomorfo a $\mathbb{C}^*$.

Esercizio 2.4 (Seconda prova intermedia, 17 Dicembre 2014, eserc. 4).
Sia G un gruppo di ordine 1000. Si provino le seguenti affermazioni.

(a) G non è un gruppo semplice.

(b) Se G ha un sottogruppo ciclico di ordine 5^3, allora ogni 5-sottogruppo di G è caratteristico in G.

(c) Se G ha un sottogruppo ciclico di ordine 5^3, allora G ha elementi di periodo 250.

3. Seconda prova intermedia 2015

Esercizio 3.1 (Seconda prova intermedia, 17 Dicembre 2015, eserc. 1)**.**
Sia G un gruppo tale che $\operatorname{Aut}(G)$ sia ciclico. Provare che G è abeliano. Si mostri poi con un esempio che se G è abeliano, $\operatorname{Aut}(G)$ non necessariamente lo è.

Esercizio 3.2 (Seconda prova intermedia, 17 Dicembre 2015, eserc. 2)**.**
Sia G un gruppo e siano A e B sottogruppi abeliani di G tali che $G = AB$. Provare che

$$\mathbf{Z}(G) = (A \cap \mathbf{Z}(G)) \cdot (B \cap \mathbf{Z}(G)).$$

Esercizio 3.3 (Seconda prova intermedia, 17 Dicembre 2015, eserc. 3)**.**

(a) Si trovino, a meno di isomorfismi, tutti i gruppi di ordine 2015.

(b) Sia G un gruppo di ordine 1016. Provare che G ha un elemento di ordine 254. Supponendo poi che G abbia un 2-sottogruppo di Sylow abeliano, si provi che $\mathbf{Z}(G)$ ha ordine divisibile per 4, ma si mostri con un esempio che G non ha necessariamente elementi di ordine 508.

4. Seconda prova intermedia 2016

Esercizio 4.1 (Seconda prova intermedia, 21 Dicembre 2016, eserc. 1)**.**
Sia G un gruppo, e si consideri l'azione per moltiplicazione a destra di G sui suoi elementi. Detto f l'omomorfismo di G in $\mathrm{Sym}(G)$ che deriva da tale azione, sia $G_D = f(G)$. In modo analogo, definiamo $G_S \leq \mathrm{Sym}(G)$ tramite l'azione per moltiplicazione a sinistra. Provare che $\mathbf{C}_{\mathrm{Sym}(G)}(G_D) = G_S$.

Esercizio 4.2 (Seconda prova intermedia, 21 Dicembre 2016, eserc. 2)**.**
Sia G un gruppo di ordine $315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, e sia S un 3-sottogruppo di Sylow di G.

(a) Supponendo che G sia semplice, determinare $|\mathbf{N}_G(S)|$.
(b) Supponendo che G sia semplice, provare che G ha un elemento di periodo 15. (Sugg.: Si stimi l'ordine di $\mathbf{C}_G(S)$.)
(c) Provare che G non è semplice, derivando una contraddizione dai punti precedenti.

Esercizio 4.3 (Seconda prova intermedia, 21 Dicembre 2016, eserc. 3)**.**
Sia G un gruppo abeliano finito, e sia N un sottogruppo ciclico di G tale che G/N sia anch'esso ciclico. Supponiamo inoltre che gli ordini di N e G/N siano coprimi. Provare che G è ciclico.

Esercizio 4.4 (Seconda prova intermedia, 21 Dicembre 2016, eserc. 4)**.**
Sia G un gruppo non abeliano di ordine 8.

(a) Provare che G ha un elemento x di periodo 4.
(b) Provare che $\langle x \rangle$ è normale in G.
(c) Provare che, se esiste $y \in G \setminus \langle x \rangle$ con $o(y) = 2$, allora $G \simeq D_8$. Altrimenti, provare che x^2 è l'unico elemento di periodo 2 in G, e $G \simeq Q_8$.

5. Seconda prova intermedia 2017

Esercizio 5.1 (Seconda prova intermedia, 21 Dicembre 2017, eserc. 1).
Classificare tutti i gruppi G di ordine 44. Dire in quali casi esistono elementi di ordine 4 e 22. Calcolare il derivato e il centro di G in tutti i casi.

Esercizio 5.2 (Seconda prova intermedia, 21 Dicembre 2017, eserc. 2).
Si classifichino i gruppi abeliani di ordine 28. Per ciacuno di questi, determinare per quali $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ esiste $a \in G$ tale che $o(a) = n$, e determinare il reticolo dei sottogruppi.

Esercizio 5.3 (Seconda prova intermedia, 21 Dicembre 2017, eserc. 3).
Sia $A = \{1, 2, 3\}$ e $\Omega = A^A = \{f \mid f : A \to A\}$.

(a) Definiamo per ogni $(\alpha, \beta) \in S_3 \times S_3$ e ogni $f \in \Omega$,

$$f \cdot (\alpha, \beta) = \alpha^{-1} f \beta$$

(composizione di funzioni effettuata da sinistra verso destra). Si dimostri che questo definisce un'azione del gruppo $G = S_3 \times S_3$ su Ω.

(b) Si determini lo stabilizzatore in G dell'applicazione identica id_A e quello della funzione costante c_1 (definita da $c_1(x) = 1$ per ogni $x \in A$); si dica quanti elementi contengono le orbite di id_A e di c_1.

6. Seconda prova intermedia 2018

Esercizio 6.1 (Seconda prova intermedia, 19 Dicembre 2018, eserc. 1)**.**
Dato un intero positivo n, sia $G = \langle g \rangle$ un gruppo ciclico di ordine n, e

$$U = \{[a]_n : a \in \mathbb{Z},\ \ (a, n) = 1\}$$

il gruppo degli elementi invertibili dell'anello $\mathbb{Z}_n$ (classi di resto modulo n).

(a) Si provi che porre $x \cdot [a]_n = x^a$ per $[a]_n \in U$ e $x \in G$, definisce un'azione di U su G.

(b) Nel caso $n = p^m$ con p primo, si provi che due elementi $x, y \in G$ appartengono alla stessa orbita se e solo se hanno lo stesso ordine.

(c) Si determini l'ordine dello stabilizzatore di x in U quando $n = 243$ e $x = g^{141}$.

Esercizio 6.2 (Seconda prova intermedia, 19 Dicembre 2018, eserc. 2)**.**
Sia G un gruppo di ordine 225.

(a) Provare che G ha un 5-sottogruppo di Sylow normale.

(b) Descrivere i possibili tipi di isomorfismo di G.

(c) Provare che il centro di G ha ordine divisibile per 3.