ALGEBRA 2
SELEZIONE DI ESERCIZI DA VECCHIE PROVE SCRITTE O PROVE INTERMEDIE

Esercizio 1 (Primo compitino, 19 Novembre 2015, eserc. 3)**.** Sia n un intero positivo, e sia $\sigma \in S_n$ un ciclo di lunghezza k. Determinare il tipo di σ^2.

Esercizio 2 (Prova scritta, 15 Luglio 2016, eserc. 2)**.** Sia G un gruppo, e siano a, b elementi di G. Si provino le seguenti conclusioni.
(a) Se $(ab)^2 = a^2b^2$, allora $ab = ba$.
(b) Se $(ab)^n = a^nb^n$ per tre interi n consecutivi, allora $ab = ba$.

Esercizio 3 (Prova scritta, 28 Aprile 2015, eserc. 2)**.** Sia G un gruppo, H un sottogruppo di G, e N, M sottogruppi normali di G. Si provino le seguenti conclusioni.
(a) Se G/M e G/N sono abeliani, allora $G/(M \cap N)$ è abeliano.
(b) Se G/N è abeliano, allora $H/(H \cap N)$ è abeliano.

Nel seguente esercizio adottiamo la convenzione per cui, date due funzioni f e g, la funzione fg è la funzione ottenuta applicando prima f e poi g.

Esercizio 4 (Prova scritta, 20 Aprile 2016, eserc. 3)**.** Sia p un numero primo e $\mathbb{Z}_p$ il gruppo $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Per a e b in $\mathbb{Z}_p$, con $a \neq 0$, si definisca la mappa $f_{a,b} : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ tale che $f_{a,b}(x) = ax + b$ per ogni $x \in \mathbb{Z}_p$. Sia $G = \{f_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{Z}_p, a \neq 0\}$.
(a) Si dimostri che G, dotato dell'operazione di composizione, è un gruppo.
(b) Determinare se G è abeliano.
(c) Provare che G è finito e determinarne l'ordine.
(d) Provare che, per ogni divisore positivo d di $|G|$, esiste un sottogruppo H di G con $|H| = d$.

Esercizio 5 (Prima prova intermedia, 17 Novembre 2016, eserc. 1)**.**
Sia G il prodotto cartesiano di insiemi $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R})$, e si consideri l'applicazione definita su $G \times G$ che a $((a, b), (c, d)) \in G \times G$ associa $(ac, bc + d)$.
(a) Provare che questa applicazione definisce su G una struttura di gruppo non abeliano.
(b) Posto $H = \{(1, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $K = \{(q, 0) \mid q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\}$, determinare il sottogruppo di G generato da H e quello generato da K.

Ultimo aggiornamento: 6 novembre 2019. Mi sono accorto che l'esercizio 21 richiede il Primo Teorema di Sylow, che rientra negli argomenti che si svolgeranno dopo il primo compitino. Mi scuso se avete perso tempo per provare a risolverlo.

Nel seguente esercizio adottiamo la convenzione per cui, date due funzioni f e g, la composizione fg è la funzione ottenuta applicando prima f e poi g. Inoltre, al punto (b), con HK si intende $\{hk : h \in H, k \in K\}$.

Esercizio 6 (Prova scritta, 17 Giugno 2015, eserc. 1)**.** Per a e b numeri reali, con $a \neq 0$, si definisca la mappa $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f_{a,b}(x) = ax + b$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(a) Provare che $G = \{f_{a,b} \ : \ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}\}$ è un gruppo rispetto alla composizione di mappe.

(b) Provare che $H = \{f_{a,0} \ : \ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ è un sottogruppo di G, che $K = \{f_{1,b} \ : \ b \in \mathbb{R}\}$ è un sottogruppo normale di G, e che $G = HK$ con $H \cap K = 1$.

(c) Fissato $b \in \mathbb{R}$, descrivere gli elementi del coniugato di H tramite $f_{1,b}$.

Esercizio 7 (Prova scritta, 17 Giugno 2015, eserc. 2)**.** Con riferimento alle notazioni introdotte nell'esercizio precedente:

(a) Posto $K_{\mathbb{Q}} = \{f_{1,b} \ : \ b \in \mathbb{Q}\}$ e $K_{\mathbb{Z}} = \{f_{1,b} \ : \ b \in \mathbb{Z}\}$, provare che né $K_{\mathbb{Q}}$ né $K_{\mathbb{Z}}$ sono sottogruppi normali di G.

(b) Provare che esistono due coniugati distinti di $K_{\mathbb{Z}}$ in G l'uno propriamente contenuto nell'altro, mentre per $K_{\mathbb{Q}}$ questo non si verifica.

(c) Provare che esiste una biezione tra l'insieme dei coniugati distinti di $K_{\mathbb{Q}}$ in G e il gruppo quoziente $\mathbb{R}^*/\mathbb{Q}^*$ (dove $\mathbb{R}^*$ e $\mathbb{Q}^*$ soo i gruppi moltiplicativi dei campi $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ rispettivamente).

Esercizio 8 (Prova scritta, 17 Luglio 2015, eserc. 1)**.** Sia G un gruppo abeliano, e sia n un intero positivo. Si considerino gli insiemi $G_1 = \{g \in G \ : \ g^n = 1\}$, e $G_2 = \{g^n \ : \ g \in G\}$. Provare che G_1 e G_2 sono sottogruppi normali di G, e che $G/G_1 \simeq G_2$.

Esercizio 9 (Prima prova intermedia, 16 Novembre 2017, eserc. 3)**.**
Sia G un gruppo finito, e sia $N \trianglelefteq G$ tale che $|N|$ sia coprimo con $|G/N|$. Provare che N contiene tutti e soli gli elementi di G il cui periodo sia un divisore di $|N|$.

Esercizio 10 (Prima prova intermedia, 19 Novembre 2013, eserc. 1)**.**
Nel gruppo simmetrico S_6 si considerino le permutazioni $\sigma = (12356)$ e $\tau = (26)(35)$ e sia $G = \langle \sigma, \tau \rangle$ il sottogruppo di S_6 generato da σ e τ. Determinare:

(a) l'ordine di G e il periodo di tutti i suoi elementi

(b) se G è isomorfo ad un sottogruppo di S_4

(c) se G è isomorfo ad un sottogruppo di S_5

(d) se G è isomorfo al gruppo dei movimenti fisici di un poligono regolare nel piano (i.e. se G è un gruppo diedrale)

Esercizio 11 (Prima prova intermedia, 19 Novembre 2013, eserc. 4)**.**

(a) Sia G un gruppo finito e $g \in G$ un elemento di periodo finito $n = p^k m$, con p primo che non divide m. Provare che esistono due elementi g_1 e g_2 in G, di periodo rispettivamente p^k e m, tali che $g_1 g_2 = g = g_2 g_1$. (Sugg.: esistono $a, b \in \mathbb{Z}$ tlai che $n = ap^k + bm$; allora $g = g^{ap^k + bm}$ ...)
(b) Sia $\phi\colon G \to H$ un omomorfismo suriettivo, e sia $h \in H$ un elemento di periodo p^k (con p primo). Provare che esiste $g \in G$, di periodo una potenza di p, tale che $\phi(g) = h$. (Sugg.: sia $g \in G$ una preimmagine di h tramite ϕ; si usi il punto precedente su g...)

Esercizio 12 (Prima prova intermedia, 17 Novembre 2016, eserc. 2)**.**
Sia H l'insieme delle radici cubiche dell'unità nel campo complesso. Posto $\mathbb{C}^* = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, provare che H è un sottogruppo normale di $\mathbb{C}^*$, e che $\mathbb{C}^*/H$ è isomorfo a $\mathbb{C}^*$.

Esercizio 13 (Prova scritta, 17 Luglio 2015, eserc. 3)**.** Sia n un intero positivo. Dimostrare che il gruppo simmetrico S_n è isomorfo ad un sottogruppo del gruppo alterno A_{n+2}.

Esercizio 14 (Prima prova intermedia, 17 Novembre 2016, eserc. 4)**.**
Sia G un gruppo, e σ un automorfismo di G. Provare le seguenti affermazioni.
(a) Se $\sigma(x) = x^{-1}$ per ogni $x \in G$, allora G è abeliano.
(b) Sia G finito. Se $\sigma \circ \sigma$ è l'identità su G e, per ogni $x \in G \setminus \{1_G\}$, si ha $\sigma(x) \neq x$, allora G è abeliano.
(Sugg. per (b): considerare l'applicazione $x \mapsto x^{-1}\sigma(x)$ definita su G e provare che è biettiva; tenendo conto di ciò, provare che σ è la mappa che associa ogni elemento di G al suo inverso.)

Nel seguente esercizio, si ricorda che, l'automorfismo interno di un gruppo G relativo a un elemento g è l'automorfismo $t_g\colon G \to G$, $x \mapsto g^{-1}xg$.

Esercizio 15 (Prima prova intermedia, 22 Novembre 2018, eserc. 1)**.**
Nel gruppo simmetrico S_{10}, si consideri la permutazione

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 2 & 8 & 4 & 7 & 1 & 3 & 10 & 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Si scriva la decomposizione in cicli disgiunti di x, x^2 e x^5.
(b) Si determini il periodo di x in S_{10}, ed il periodo della classe laterale $x\mathrm{A}_{10}$ nel gruppo quoziente $\mathrm{S}_{10}/\mathrm{A}_{10}$ (dove A_{10} è il gruppo alterno su 10 oggetti).
(c) È vero che, per ogni scelta di $y \in \mathrm{S}_{10}$ avente lo stesso periodo di x, esiste $g \in \mathrm{S}_{10}$ tale che $t_g(x) = y$? (Qui t_g indica l'automorfismo interno di S_{10} relativo a g.)
(d) Si determinino tutti i sottogruppi di $\langle x \rangle$, con i rispettivi ordini.

Esercizio 16 (Prima prova intermedia, 22 Novembre 2018, eserc. 2)**.**
Nel gruppo $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_7)$ (matrici invertibili 2×2 a coefficienti nel campo con 7 elementi), si considerino i

sottoinsiemi G, costituito dagli elementi della forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ (che siano invertibili!), e N, costituito dagli elementi della forma $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Provare che G ed N sono sottogruppi di $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_7)$, e che N è normale in G.

(b) Determinare $|G|$ ed $|N|$. Determinare poi il periodo della classe laterale di $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ nel gruppo quoziente G/N.

(c) Posto $\mathbb{Z}_7^* = (\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, \cdot)$, si provi che la funzione $\phi : G \to \mathbb{Z}_7^*$, che manda $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ in ac, è un omomorfismo, e se ne determini il nucleo K.

(d) Esibire un elemento di periodo 14 in K.

Esercizio 17 (Prova scritta, 25 Settembre 2015, eserc. 1)**.**
Si consideri l'insieme X delle matrici 2×2 a coefficienti reali del tipo $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, al variare di $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Mostrare che X è un sottogruppo di $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ isomorfo al gruppo moltiplicativo del campo complesso.

Esercizio 18 (Prova scritta, 19 Novembre 2015, eserc. 2)**.**
Sia $G \subseteq \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}_8)$ il gruppo moltiplicativo delle matrici della forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ con $ad = 1$. Provare che l'applicazione $f : G \to U(\mathbb{Z}_8)$ tale che $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a$ è un epimorfismo (dove $U(\mathbb{Z}_8)$ indica il gruppo moltiplicativo degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_8$), e se ne determini il nucleo.

Esercizio 19 (Prova scritta, 29 Gennaio 2016, eserc. 3)**.**
Sia $\mathbb{Q}^+$ il gruppo additivo dei numeri razionali, e sia $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+/\mathbb{Z}$ definita da $f(x) = \mathbb{Z} + 3x$. Mostrare che f è un epimorfismo il cui nucleo K contiene $\mathbb{Z}$. Provare poi che $K/\mathbb{Z} \simeq (\mathbb{Z}_3, +)$.

Esercizio 20 (Prova scritta, 26 Febbraio 2016, eserc. 1)**.**
Sia G un gruppo finito. Determinare tutti i possibili omomorfismi di G in $\mathbb{Z}$.

Per il prossimo esercizio può essere utile il *Primo Teorema di Sylow* (che si vedrà dopo il primo compitino):

> Se l'ordine di un gruppo finito è divisibile per una potenza p^k di un numero primo p, allora G contiene almeno un sottogruppo H di ordine p^k.

Esercizio 21 (Prova scritta, 20 Aprile 2016, eserc. 2)**.**
Sia G un gruppo finito, di ordine rs con $\mathrm{MCD}(r, s) = 1$. Definendo $T = \{x \in G \mid x^r = 1\}$, e $H = \langle T \rangle$, si provi che

(a) r divide H,

(b) se G è abeliano, allora $H = T$ e $|H| = r$.

Inoltre si mostri con esempi che, se G non è abeliano, si può avere sia $|H| = r$ sia $|H| \neq r$.

Esercizio 22 (Prova scritta, 24 Giugno 2016, eserc. 1).
Sia X un insieme infinito e, per $f \in \mathrm{Sym}(X)$, sia $\mathrm{fix}(f) = \{x \in X \mid f(x) = x\}$. sia G l'insieme delle permutazioni $f \in \mathrm{Sym}(X)$ tali che $X \setminus \mathrm{fix}(f)$ sia finito. Provare che:

(a) $\mathrm{fix}(g^{-1}fg) = \mathrm{fix}(f) \cdot g$ (trasformato di $\mathrm{fix}(f)$ mediante g) per ogni $f, g \in \mathrm{Sym}(X)$;
(b) G è un sottogruppo normale non abeliano di $\mathrm{Sym}(X)$;
(c) G è infinito, ma ogni $f \in G$ ha periodo finito.
(d) $\mathrm{Sym}(X)$ ha elementi di periodo infinito.

Esercizio 23 (Prova scritta, 15 Luglio 2016, eserc. 3).
Sia $(A, \cdot)$ un gruppo abeliano e sia $\mathcal{H}$ l'insieme di tutti gli omomorfismi di $(\mathbb{Z}, +)$ in $(A, \cdot)$.

(a) Si provi che $\mathcal{H}$ è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita da $(f \star g)(z) = f(z) \cdot g(z)$, per ogni $f, g \in \mathcal{H}$ e per ogni $z \in \mathbb{Z}$.
(b) Si provi che $(\mathcal{H}, \star)$ è isomorfo ad A.

Esercizio 24 (Prova scritta, 23 Febbraio 2017, eserc. 2).
Si consideri l'insieme A costituito dai numeri razionali rappresentabili mediante frazioni del tipo $n/5^k$, con $n \in \mathbb{Z}$ e $k \in \mathbb{N}$.

(a) Provare che A è un sottogruppo di $(\mathbb{Q}, +)$ contenente $\mathbb{Z}$.
(b) Provare che ogni elemento del gruppo quoziente $A/\mathbb{Z}$ ha periodo una potenza di 5.
(c) Provare che, se θ è un omomorfismo di $(\mathbb{Z}, +)$ in $A/\mathbb{Z}$, allora $\theta(\mathbb{Z})$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_{5^e}$ per qualche e in $\mathbb{N}$.

Esercizio 25 (Prova scritta, 28 Aprile 2017, eserc. 1).
Sia $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ il gruppo delle matrici 2×2 invertibili a coefficienti complessi, con l'ordinario prodotto riga per colonna. Sia $H = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{C}^* \right\}$, dove $\mathbb{C}^*$ è il gruppo moltiplicativo del campo complesso.

(a) Provare che H è un sottogruppo abeliano di G la cui cardinalità è quella del continuo, e si dica se H è normale in G.
(b) Posto $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, si determinino i periodi di X e Y, e si scrivano gli elementi di $N = \langle A \rangle$ e $M = \langle B \rangle$.
(c) Provare che l'applicazione $\phi : H \to \mathbb{C}^*$ definita da $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \mapsto xy$ è un omomorfismo suriettivo, e se ne determini il nucleo.

Esercizio 26 (Prova scritta, 12 Settembre 2019, eserc. 1).
Sia G l'insieme delle matrici

$$\begin{pmatrix} 2^k & p(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove k varia in $\mathbb{Z}$ e $p(x)$ in $\mathbb{Q}[x]$. Si provi che:

(a) G è un gruppo non abeliano rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

(b) L'insieme

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & r(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid r(x) \in \mathbb{Z}[x] \right\}$$

è un sottogruppo di G.

(c) Posto $g = \begin{pmatrix} 2^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, il laterale sinistro gH contiene propriamente il laterale destro Hg.

Esercizio 27 (Prova scritta, 17 Febbraio 2014, eserc. 1).
Sia G un gruppo ciclico non banale. Provare che sono equivalenti le seguenti condizioni.

(a) G è finito, e il suo ordine non è potenza di un primo.

(b) Esistono in G due sottogruppi propri la cui intersezione è banale.

Si mostri poi che se si assume soltanto che G sia abeliano, le due condizioni non sono equivalenti.

Esercizio 28 (Prova scritta, 7 Maggio 2014, eserc. 2).
Siano n, m interi maggiori di 1. Determinare gli epimorfismi di $(\mathbb{Z}_n, +)$ in $(\mathbb{Z}_m, +)$, e provare che hanno lo stesso nucleo.

Esercizio 29 (Prova scritta, 7 Maggio 2014, eserc. 3).
Sia $\mathbb{K}$ un campo. e sia $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{K} \right\}$. Sia inoltre

$$S = \{M \in G \mid \det M = 1\}.$$

Provare che:

(a) $S \trianglelefteq G$;

(b) $S \cong (\mathbb{K}, +)$;

(c) $G/S \cong (\mathbb{K}^*, \cdot)$.

Esercizio 30 (Prova scritta, 29 Gennaio 2016, eserc. 2).
Sia G un gruppo, e siano H e K sottogruppi di G tali che G sia prodotto diretto (interno) di H e K. Provare che $\mathrm{Aut}(H) \times \mathrm{Aut}(K)$ è isomorfo ad un sottogruppo di $\mathrm{Aut}(G)$. Provare poi che, se H e K sono sottogruppi caratteristici di G, allora $\mathrm{Aut}(H) \times \mathrm{Aut}(K) \simeq \mathrm{Aut}(G)$.

Esercizio 31 (Prova scritta, 26 Febbraio 2016, eserc. 3)**.**

(a) Siano G_1, G_2 gruppi, ed N_1, N_2 sottogruppi normali rispettivamente di G_1 e G_2. Provare che
$$\frac{G_1 \times G_2}{N_1 \times N_2} \simeq \frac{G_1}{N_1} \times \frac{G_2}{N_2}.$$
(b) Trovare tre sottogruppi distinti di indice 2 in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. (Sugg.: si applichi il punto precedente con $N_i = 2\mathbb{Z}$.)

(c) Si provi che $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ha esattamente tre sottogruppi di indice 2.

Esercizio 32 (Prova scritta, 20 Aprile 2016, eserc. 1)**.**
Sia G un gruppo e H un suo sottogruppo normale. Provare che le seguenti condizioni sono equlvalenti.

(a) Esiste $K \leq G$ tale che G sia prodotto diretto interno di H e K.

(b) Esiste un endomorfismo ϕ di G tale che $\phi(G) \leq H$ e $\phi|_H = \mathrm{id}_H$.

Esercizio 33 (Prova scritta 16 Settembre 2016, eserc. 1)**.** (a) Sia G un gruppo non banale. Provare che se A, B sono due sottogruppi normali abeliani di G tali che $G = AB$, allora il centro $Z(G)$ è non banale.

(b) Si consideri il prodotto diretto $S_3 \times C_2$, dove C_2 è il gruppo con due elementi. Mostrare che $Z(G)$ è non banale, ma non esistono due sottogruppi normali abeliani A, B tali che $G = AB$.

Esercizio 34 (Prova scritta, 19 Luglio 2017, eserc. 1)**.**
Sia G il gruppo $(\mathbb{Q}, +)$ e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si definisca
$$H_n = \{(q, nq) \mid q \in G\}.$$
(a) Si provi che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, H_n è un sottogruppo di $G \times G$, e che, se $n \neq m$, allora $H_n \cap H_m$ è il sottogruppo identico.

(b) Fissato $n \in \mathbb{N}$, si definisca un omomorfismo $\phi_n : G \times G \to G$ tale che H_n sia il nucleo di ϕ_n.

Esercizio 35 (Prova scritta 16 Novembre 2017, eserc. 1)**.** Sia G un gruppo, e siano $N \trianglelefteq G$ e $H \leq G$ tali che $G = NH$. Si provi che se N è abeliano, allora $N \cap H \trianglelefteq G$. Si dica poi se la stessa conclusione è vera senza assumere l'abelianità di N.

Esercizio 36 (Prova scritta, 13 Settembre 2018, eserc. 2)**.**
Sia H un gruppo. Sull'insieme $G = H \times H$ si definisca l'operazione $\cdot$ ponendo
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, c^{-1}bcd)$$
per ogni $(a, b), (c, d) \in G$. Si definiscano poi
$$S = \{(a^{-1}, a) \mid a \in H\},$$
$$T = \{(a, 1_H) \mid a \in H\},$$
$$U = \{(1_H, a) \mid a \in H\}.$$

(a) Si provi che $(G, \cdot)$ è un gruppo (tralasciando l'associatività).

(b) Si provi che S, T e U sono sottogruppi di G, tutti isomorfi ad H.

(c) Si provi che $G \simeq S \times U$.

(d) Si provi che $T \trianglelefteq G$ se e solo se H è abeliano.

Esercizio 37 (Prova scritta, 3 Maggio 2019, eserc. 1)**.**
Siano G e H gruppi finiti tali che $(|G|, |H|) = 2$. Si dimostri che se esiste un omomorfismo $\phi : G \longrightarrow H$ tale che $\ker \phi \neq G$ allora G ha un sottogruppo di indice 2.

Esercizio 38 (Prima prova intermedia, 19 Novembre 2015, eserc. 1)**.**
Sia K un campo. Provare che ciascuno degli insiemi

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \;:\; a, b, d \in K,\; ad \neq 0 \right\},$$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;:\; a, b \in K,\; a \neq 0 \right\},$$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;:\; b \in K \right\}$$

è un sottogruppo di $\mathrm{GL}(2, K)$. Inoltre:

(a) Provare che $L \trianglelefteq H$.

(b) Provare che L non è normale in $\mathrm{GL}(2, K)$.

(c) Provare che L è isomorfo a $(K, +)$.

(d) Provare che H/L è isomorfo a $K^* \times K^*$, dove $K^* = (K \setminus \{0\}, \cdot)$.

(e) Se possibile, determinare K in modo tale che L sia ciclico. Si faccia lo stesso per H/L.

Esercizio 39 (Prima prova intermedia, 19 Novembre 2015, eserc. 2)**.**
Sia G un gruppo. Provare che l'insieme $H = \{(x, x) \;:\; x \in G\}$ è un sottogruppo del prodotto diretto $G \times G$, e che H è isomorfo a G. Dimostrare poi che $H \trianglelefteq G \times G$ se e solo se G è abeliano.

Esercizio 40 (Prima prova intermedia, 16 Novembre 2017, eserc. 2)**.**
Sia G un gruppo, e siano H, K, N sottogruppi di G tali che $N \trianglelefteq G$, $HN = KN = G$, e $H \cap N = K \cap N = 1$.

(a) Si provi che H e K sono isomorfi.

(b) Si mostri che un isomorfismo di H in K può essere definito ponendo $f(h) = k$ se e solo se $hk^{-1} \in N$.