ALGEBRA 2
SELEZIONE DI ESERCIZI DA VECCHIE PROVE SCRITTE O PROVE INTERMEDIE
(SECONDO FOGLIO)

Esercizio 1 (Seconda prova intermedia, 17 Dicembre 2015, eserc. 1)**.**
Sia G un gruppo tale che $\mathrm{Aut}(G)$ sia ciclico. Provare che G è abeliano. Si mostri poi con un esempio che se G è abeliano, $\mathrm{Aut}(G)$ non necessariamente lo è.

Esercizio 2 (Seconda prova intermedia, 17 Dicembre 2015, eserc. 2)**.**
Sia G un gruppo e siano A e B sottogruppi abeliani di G tali che $G = AB$. Provare che

$$\mathbf{Z}(G) = (A \cap \mathbf{Z}(G)) \cdot (B \cap \mathbf{Z}(G)).$$

Esercizio 3 (Seconda prova intermedia, 17 Dicembre 2014, eserc. 3)**.**
Sia $\mathbb{C}^*$ il gruppo moltiplicativo dei numeri complessi diversi da zero, e per ogni numero naturale $n \geq 1$, sia $U_n = \{z \in \mathbb{C}^* \mid z^n = 1\}$ l'insieme delle radici n-esime dell'unità.

(a) Si provi che, per ogni n, U_n è un sottogruppo di C^*.
(b) Si dimostri che, per ogni n, m, $U_n \leq U_m$ se e solo se $n \mid m$; in tal caso si determini l'indice $U_m : U_n$.
(c) Si dimostri che, per ogni n, il gruppo quoziente C^*/U_n è isomorfo a C^*. (Sugg.: si consideri l'applicazione $f(x) = x^n$ di C^* in sè.)
(d) Posto

$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n,$$

si dimostri che U è un sottogruppo di $\mathbb{C}^*$, e che $\mathbb{C}^*/U$ non è isomorfo a $\mathbb{C}^*$.

Esercizio 4 (Seconda prova intermedia, 17 Dicembre 2013, eserc. 1)**.**
Sia G un gruppo, e A, B due sottogruppi di G tali che $G = AB$. Provare che, per ogni x, y in G, si ha $G = A^x B^y$.

Esercizio 5 (Prova scritta 16 Settembre 2016, eserc. 1)**.** (a) Sia G un gruppo non banale. Provare che se A, B sono due sottogruppi normali abeliani di G tali che $G = AB$, allora il centro $Z(G)$ è non banale.
(b) Si consideri il prodotto diretto $S_3 \times C_2$, dove C_2 è il gruppo con due elementi. Mostrare che $Z(G)$ è non banale, ma non esistono due sottogruppi normali abeliani A, B tali che $G = AB$.

Ultimo aggiornamento: 13 dicembre 2019.

Esercizio 6 (Prova scritta, 28 Aprile 2017, eserc. 4). Provare che un gruppo G ha esattamente tre sottogruppi se e solo se è ciclico di ordine p^2, dove p è un numero primo.

Esercizio 7 (Prova scritta, 28 Aprile 2017, eserc. 3).
Sia $\Omega = \mathbb{Z}_{102}$, e siano σ, τ le applicazioni di Ω in sé definite da $\sigma(x) = x+1$ e $\tau(x) = -x+3$ per ogni $x \in \Omega$. Provare che σ e τ sono elementi di $\mathrm{Sym}(\Omega)$, e che τ è nel normalizzante di $\langle\sigma\rangle$ in $\mathrm{Sym}(\Omega)$. Descrivere il gruppo $H = \langle\sigma, \tau\rangle$ e determinare se esso possieda elementi di periodo 4.

Esercizio 8 (Prova scritta, 25 Gennaio 2018, eserc. 1).
Si consideri la permutazione $\pi \in \mathrm{Sym}(9)$ data da

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 5 & 6 & 1 & 9 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Qual è il periodo di π?
(b) È vero che $\mathbf{C}_{\mathrm{Sym}(9)}(\pi) \supseteq \langle\pi\rangle$?
(c) È vero che $\mathbf{C}_{\mathrm{Sym}(9)}(\pi) \subseteq \langle\pi\rangle$?

Esercizio 9 (Seconda prova intermedia, 17 Dicembre 2014, eserc. 1).
Sia G un gruppo di ordine 2015, e sia data una azione di G su un insieme S con $|S| = 20$.
(a) Qual è il minimo numero di orbite in cui S viene ripartito dall'azione di G?
(b) Si può stabilire esattamente il numero di orbite in cui S viene ripartito da G nel caso in cui l'azione sia priva di punti fissi?

Esercizio 10 (Seconda prova intermedia, 17 Dicembre 2014, eserc. 2).
Sia data un'azione transitiva del gruppo G sull'insieme Ω e sia $N \trianglelefteq G$. Per ogni $x \in \Omega$ denotiamo con xN l'orbita di x sotto l'azione ristretta ad N, e indichiamo con Γ l'insieme di tutte le N-orbite su Ω.
(a) Si prove che ponendo, per ogni $xN \in \Gamma$ ed ogni $g \in G$,

$$(xN) \cdot g = (x \cdot g)N$$

si definisce un'azione di G su Γ.
(b) Si provi che l'azione di G su Γ definita al punto (a) è transitiva.
(c) Si provi che tutte le orbite di N su Ω hanno la stessa cardinalità.

Esercizio 11 (Seconda prova intermedia, 21 Dicembre 2017, eserc. 3).
Sia $A = \{1, 2, 3\}$ e $\Omega = A^A = \{f \mid f : A \to A\}$.
(a) Definiamo per ogni $(\alpha, \beta) \in S_3 \times S_3$ e ogni $f \in \Omega$,

$$f \cdot (\alpha, \beta) = \alpha^{-1} f \beta$$

(composizione di funzioni effettuata da sinistra verso destra). Si dimostri che questo definisce un'azione del gruppo $G = S_3 \times S_3$ su Ω.

(b) Si determini lo stabilizzatore in G dell'applicazione identica id_A e quello della funzione costante c_1 (definita da $c_1(x) = 1$ per ogni $x \in A$); si dica quanti elementi contengono le orbite di id_A e di c_1.

Esercizio 12 (Seconda prova intermedia, 19 Dicembre 2018, eserc. 1)**.**
Dato un intero positivo n, sia $G = \langle g \rangle$ un gruppo ciclico di ordine n, e

$$U = \{[a]_n : a \in \mathbb{Z},\ \ (a, n) = 1\}$$

il gruppo degli elementi invertibili dell'anello $\mathbb{Z}_n$ (classi di resto modulo n).

(a) Si provi che porre $x \cdot [a]_n = x^a$ per $[a]_n \in U$ e $x \in G$, definisce un'azione di U su G.

(b) Nel caso $n = p^m$ con p primo, si provi che due elementi $x, y \in G$ appartengono alla stessa orbita se e solo se hanno lo stesso ordine.

(c) Si determini l'ordine dello stabilizzatore di x in U quando $n = 243$ e $x = g^{141}$.

Esercizio 13 (Prova scritta, 17 Luglio 2014, eserc. 1)**.**

(a) Dimostrare che, se $G = H_1 \times H_2$ è un gruppo ciclico, con H_1 e H_2 sottogruppi di G entrambi non banali, allora G è finito e $|H_1|$, $|H_2|$ sono coprimi.

(b) Sia G un gruppo non abeliano ed M un suo sottogruppo massimale. Provare che M è abeliano se e solo se $M = C_G(M)$.

Esercizio 14 (Prova scritta, 24 Gennaio 2017, eserc. 1)**.**
Si consideri il gruppo $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ costituito dalle matrici 2×2 invertibili a coefficienti interi. Sia

$$\Omega = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\},$$

e si definisca l'applicazione $\bullet : \Omega \times G \to \Omega$ mediante l'usuale moltiplicazione a destra di matrici, ovvero

$$(a, b) \bullet \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (ax + bz, ay + bw).$$

(a) Provare che l'applicazione $\bullet$ defiisce un'azione di G su Ω.

(b) Esistono punti fissi in tale azione? Se sì, descriverli.

(c) Provare che $(a, b) \in \Omega$ appartiene alla stessa orbita di $(1, 0)$ se e solo se a e b sono interi coprimi.

(d) Provare che due elementi (a, b) e (c, d) di $\Omega \setminus \{(0, 0)\}$ appartengono alla stessa orbita se e solo se $\mathrm{MCD}(a, b) = \mathrm{MCD}(c, d)$.

Esercizio 15 (Prova scritta, 23 Febbraio 2017, eserc. 1)**.**
Sia G un gruppo, e sia H il prodotto diretto esterno $G \times G$. Denotando con Ω l'insieme degli elementi di G, si ponga

$$\omega \cdot (x, y) = x^{-1} \omega y$$

per ogni $\omega \in \Omega$ e $(x, y) \in H$.

(a) Provare che resta così definita un'azione di H su Ω.

(b) Determinare lo stabilizzatore di $1_G \in \Omega$ e quello di un qualungue $g \in \Omega$.

(c) Determinare il nucleo dell'azione.

Esercizio 16 (Prova scritta, 14 Settembre 2017, eserc. 4)**.**
Sia C un gruppo ciclico di ordine 12 che agisce fedelmente sull'insieme $S = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Si provi che non esistono orbite di lunghezza 1 (ovvero, non esistono punti fissi) in tale azione.

Esercizio 17 (Prova scritta 16 Novembre 2017, eserc. 2)**.** Sia data un'azione del gruppo G sull'insieme Ω. Sia $N \trianglelefteq G$, e sia $\mathcal{O}$ un'orbita per l'azione indotta di N su Ω (N.B., se $\phi : G \to \mathrm{Sym}(\Omega)$ è l'omomorfismo associato all'azione di G su Ω, l'azione indotta di N su Ω è associata alla restrizione $\phi_N : N \to \mathrm{Sym}(\Omega)$). Si provi che, per ogni $g \in G$, l'insieme $\mathcal{O} \cdot g = \{\omega \cdot g \mid \omega \in \mathcal{O}\}$ è ancora un'orbita per l'azione indotta di N su Ω.

Esercizio 18 (Prova scritta, 22 Febbraio 2018, eserc. 2)**.**
Sia $V = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$, il prodotto diretto (esterno) di due copie di $(\mathbb{Z}_5, +)$. Su $V^* = V \setminus \{(0,0)\}$ si consideri la relazione di equivalenza $\sim$ per cui $(x,y) \sim (z,w)$ se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}$ tale che $(x,y) = (\lambda z, \lambda w)$. Si denoti con Ω l'insieme quoziente $V^*/\sim$, e con $[(x,y)]$ la classe di equivalenza di $(x,y) \in V^*$. Si consideri quindi il sottogruppo

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{Z}_5,\ ac \neq 0 \right\}$$

di $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_5)$.

(a) Si determinino $|\Omega|$ e $|G|$.

(b) Per $[(x,y)] \in \Omega$ e $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in G$, si ponga $[(x,y)] \bullet \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = [(ax+by, cy)]$. Provare che in tal modo resta definita un'azione di G su Ω.

(c) Determinare il nucleo dell'azione del punto precedente. Determinare poi lo stabilizzatore di $[(0,1)]$, lo stabilizzatore di $[(1,0)]$, e infine il numero delle orbite in tale azione.

Esercizio 19 (Prova scritta, 4 Maggio 2018, eserc. 2)**.**
Sia $G = \mathrm{GL}\,\mathbb{Q}$, il gruppo delle matrici 2×2 invertibili a coefficienti razionali, con l'usuale prodotto riga per colonna. Siano

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il periodo di X, di Y e di XY.

(b) Descrivere il coniugato mediante X di un generico elemento del sottogruppo $\langle XY \rangle$.

(c) Posto $H = \langle X, Y \rangle$, si provi che $N = \langle XY \rangle$ e $M = \langle (XY)^2 \rangle$ sono sottogruppi normali di H.

(d) Si dimostri che H è il prodotto semidiretto $\langle XY \rangle \rtimes \langle X \rangle$, si determino i tipi di isomorfismo dei gruppi quozienti H/N e H/M, dove N ed M sono definiti nel punto precedente.

(e) Si provi che N (rispettivamente G) ha una famiglia infinita di sottogruppi propri, a due a due distinti, tutti isomorfi a N (rispettivamente G).

Esercizio 20 (Prova scritta, 20 Giugno 2018, eserc. 1).
Siano a, b elementi di $\mathrm{Sym}(\mathbb{Z}_5)$ definiti da, per ogni $z \in \mathbb{Z}_5$, $a(z) = z + 1$, $b(z) = -z$. Si ponga $A = \langle a \rangle$, $B = \langle b \rangle$ (sottogruppi di $\mathrm{Sym}(\mathbb{Z}_5)$), e sia $G = AB$ (tale G è un sottogruppo di $\mathrm{Sym}(\mathbb{Z}_5)$, perché?).

(a) Si provi che se per $g \in G$ esistono $z, w \in \mathbb{Z}_5$, con $z \neq w$, tali che $g(z) = z$ e $g(w) = w$, allora $g = 1_G$.
(b) Si provi che porre, per $g \in G$ e $(z, w) \in \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$, $(z, w) \cdot g = (g(z), g(w))$ definisce un'azione fedele di G su $\Omega = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$.
(c) Si provi che se $z \neq w$ allora la cardinalità dell'orbita di (z, w) è 10.

Esercizio 21 (Prova scritta, 17 Luglio 2018, eserc. 2).
Sia $\Omega = \mathbb{R}^2$ visto come spazio vettoriale dei vettori colonna e sia $G = GL_2(\mathbb{R})$. Dati $v \in \Omega$ e $A \in GL_2(\mathbb{R})$, definiamo $v \cdot A = A^{-1}v$, ove a secondo membro è inteso come prodotto righe per colonne di A^{-1} e del vettore colonna v.

(a) Si provi che questa legge definisce un'azione di G su Ω.
(b) Si dica se tale azione è transitiva e/o fedele.

Esercizio 22 (Prova scritta, 13 Settembre 2018, eserc. 3).
Sia Ω l'insieme $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Per σ nel gruppo simmetrico S_3, e (a_1, a_2, a_3) in Ω, si ponga

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot \sigma = (a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}).$$

Si provi che in tal modo resta definita un'azione di S_3 su Ω; si determinino poi le orbite e il nucleo di tale azione.

Esercizio 23 (Prova scritta, 28 Gennaio 2019, eserc. 1).
Consideriamo gli insiemi di numeri naturali $Y_m = \{1, 2, ..., m\}$ e $Y_n = \{1, 2, ..., m\}$, e definiamo

$$X = \{f \colon Y_m \to Y_n \mid f \text{ applicazione}\}.$$

Sia inoltre G il prodotto diretto $S_m \times S_n$, e consideriamo l'applicazione $X \times G \to X$ definita da

$$(f, (\sigma, \tau)) \mapsto \sigma^{-1} f \tau.$$

(a) Provare che in tal modo resta definita un'azione di G su X.
(b) Tale azione è fedele?
(c) Per $n = m = 3$, calcolare le cardinalità delle orbite in cui l'insieme X viene ripartito mediante tale azione.

Esercizio 24 (Prova scritta, 3 Maggio 2019, eserc. 2).
Sia G un gruppo di ordine 2006 e sia data un'azione di G su un insieme S con $|S| = 20$. Si provi che G ha almeno tre orbite su S. Si computi il numero di orbite nel caso in cui G non abbia punti fissi.

Esercizio 25 (Prova scritta, 17 Febbraio 2014, eserc. 2).
Mostrare che un gruppo di ordine p^2q^2, con p, q primi, non è semplice.

Esercizio 26 (Prova scritta, 16 Giugno 2014, eserc. 1).
Determinare (a meno di isomorfismi) tutti i gruppi di ordine 45, e per ciascuno di essi gli ordini degli elementi. Provare poi che un gruppo di ordine 315 non è semplice.

Esercizio 27 (Prova scritta, 16 Giugno 2014, eserc. 3).
Sia G un gruppo di ordine 8 tale che $x^2 = 1$ per ogni $x \in G$. Si determinino tutti i sottogruppi di G.

Esercizio 28 (Prova scritta, 17 Luglio 2014, eserc. 1).
Provare che un gruppo di ordine 1056 non è semplice.

Esercizio 29 (Prova scritta, 25 Settembre 2015, eserc. 2).
Si determinino i tipi di isomorfismo dei gruppi di ordine 45.

Esercizio 30 (Prova scritta, 19 Novembre 2015, eserc. 1).
Sia G un gruppo di ordine 99. Provare che G è abeliano e studiare il gruppo $\mathrm{Aut}(G)$.

Esercizio 31 (Prova scritta, 29 Gennaio 2016, eserc. 1).
Sia G un gruppo di ordine 56. Provare che G non è semplice.

Esercizio 32 (Prova scritta, 24 Giugno 2016, eserc. 2).
Determinare, a meno di isomorfismi, i gruppi di ordine 175.

Esercizio 33 (Prova scritta, 24 Giugno 2016, eserc. 3).
Sia G un gruppo abeliano finito, e sia H un suo sottogruppo tale che $|H|$ sia coprimo con $|G:H|$: provare che G è ciclico se e solo se lo sono H e G/H. Si dica poi se tale enunciato vale anche per G non abeliano (supponendo $H \trianglelefteq G$).

Esercizio 34 (Prova scritta 16 Settembre 2016, eserc. 3). Sia G un gruppo di ordine 245. Determinare i possibili tipi di isomorfismo di G.

Esercizio 35 (Prova scritta, 24 Gennaio 2017, eserc. 3).
Sia G un gruppo di ordine 12.

(a) Provare che se G ha un 3-sottogruppo di Sylow normale, allora il centro di G ha ordine pari.

(b) Provare che se il centro di G ha ordine dispari, allora G è isomorfo al gruppo alterno su quattro oggetti.

Esercizio 36 (Prova scritta, 23 Febbraio 2017, eserc. 4)**.**
Sia G un gruppo di ordine $760 = 2^3 \cdot 5 \cdot 19$, e sia P un 19-sottogruppo di Sylow di G. Si supponga che P sia normale in G.

(a) Provare che $\mathbf{C}_G(P)$ è normale in G, e determinare i possibili ordini di $\mathbf{C}_G(P)$.

(b) Provare che G ha un sottogruppo normale ciclico di ordine 95.

Esercizio 37 (Prova scritta, 15 Giugno 2017, eserc. 2)**.**
Sia p un divisore primo dell'ordine del gruppo finito G, e sia $N \trianglelefteq G$ con $|N| = p$. Si provi che $N \leq P$ per ogni p- sottogruppo di Sylow P di G.

Esercizio 38 (Prova scritta, 15 Giugno 2017, eserc. 4)**.**
Sia G un gruppo di ordine 21, e si assuma che esista un omomorfismo non banale $\phi : G \to \mathbb{Z}_7$ (cioè tale che G non coincida col nucleo).

(a) Si provi che G ha un unico sottogruppo normale di ordine 3.

(b) Si provi che G è ciclico.

Esercizio 39 (Prova scritta, 19 Luglio 2017, eserc. 4)**.**
Sia G un gruppo di ordine 231.

(a) Si provi che esiste un omomorfismo non banale di G in un gruppo ciclico di ordine 3.

(b) Si provi che G ha elementi di ordine 77 e di ordine 33.

(c) Supponendo G non abeliano, si determini il numero di sottogruppi di Sylow di G per ciascun divisore primo del suo ordine, e si provi che in questo caso non esiste alcun omomorfismo non banale di G in un gruppo ciclico di ordine 7.

Esercizio 40 (Prova scritta, 14 Settembre 2017, eserc. 3)**.**
Sia G un gruppo di ordine $pqrt$, con p, q, r, t primi (non necessariamente distinti). Si dimostri che, se $p > qrt$, allora G ha sottogruppi di ordine rispettivamente pq, pr e pt.

Esercizio 41 (Prova scritta, 14 Settembre 2017, eserc. 4)**.**
Sia C un gruppo ciclico di ordine 12 che agisce fedelmente sull'insieme $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Si provi che non esistono orbite di lunghezza 1 (ovvero, non esistono punti fissi) in tale azione.

Esercizio 42 (Prova scritta 16 Novembre 2017, eserc. 3)**.** Sia G un gruppo di ordine 154.

(a) Si provi che G ha un sottogruppo (normale) di indice 2.

(b) Si provi che il sottogruppo del punto precedente è abeliano.

Esercizio 43 (Prova scritta, 25 Gennaio 2018, eserc. 2)**.**
Sia G un gruppo di ordine $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$. Supponiamo che esista $N \trianglelefteq G$, con N abeliano di ordine 6.

(a) Sia $a \in N$ un elemento di ordine 3; si provi che $\langle a \rangle$ è normale in G, e che $\mathbf{C}_G(a) = G$. Si concluda che N è contenuto in $\mathbf{Z}(G)$.

(b) Ricordando che $\mathbf{Z}(G)$ è contenuto nel normalizzante di ogni sottogruppo di G, si provi che G ha un unico 5-sottogruppo di Sylow.

(c) Si deduca che G è abeliano.

Esercizio 44 (Prova scritta, 25 Gennaio 2018, eserc. 3)**.**
Sia $F = \mathbb{Z}_7$ il campo di ordine 7, e sia F^* il suo gruppo moltiplicativo. Sull'insieme $G = F \times F^*$ si definisca un'operazione ponendo, per ogni $(a,x),(b,y) \in G$, $(a,x)(b,y) = (a + xb, xy)$. Con tale operazione, G risulta un gruppo (non occorre provarlo).

(a) Si provi che ponendo, per ogni $u \in F$ ed ogni $(a,x) \in G$,
$$u \cdot (a,x) = x^{-1}(u + a),$$
resta definita un'azione di G sull'insieme F.

(b) Si dimostri che tale azione è transitiva e fedele.

(c) Sapendo che il numero dei 7-sottogruppi di Sylow di $\mathrm{Sym}(7)$ è $5!$ (perché?..), e denotando con P uno di essi, si provi che $\mathbf{N}_{\mathrm{Sym}(7)}(P) \simeq G$.

Esercizio 45 (Prova scritta, 22 Febbraio 2018, eserc. 1)**.**
Sia $G = \mathrm{Sym}(n)$ (con $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$), e sia π un n-ciclo in G.

(a) Si determini $\mathbf{C}_G(\pi)$.

(b) Se $n = p$ è un numero primo, si determini il numero di p-sottogruppi di Sylow di G.

Esercizio 46 (Prova scritta, 22 Febbraio 2018, eserc. 3)**.**
Siano p, q numeri primi positivi con $p > q$, e sia G un gruppo di ordine p^2q^2.

(a) Si provi che $|G| = 36$ oppure G ha un p-sottogruppo di Sylow normale.

(b) Sia $G = \mathrm{Sym}(3) \times C$, dove C è ciclico di ordine 6; si determini il numero dei 2-Sylow e il numero dei 3-Sylow di G.

(c) Si descriva esplicitamente un gruppo G di ordine 36 in cui il numero dei 2-Sylow sia 3^2.

Esercizio 47 (Prova scritta, 20 Giugno 2018, eserc. 2)**.**
Sia G un gruppo di ordine 91.

(a) Si provi che G è ciclico.

(b) Si provi che l'applicazione $\phi : G \to G \times G$ definita da $\phi(g) = (g^{21}, g^{39})$ per ogni $g \in G$, è un omomorfismo; si provi poi che ϕ è iniettiva.

(c) Fissato un generatore y di G, sia H il sottogruppo $\langle y^{13} \rangle \times \langle y^7 \rangle$ di $G \times G$; si provi che $G \times G = H \times \phi(G)$.

Esercizio 48 (Prova scritta, 20 Giugno 2018, eserc. 3).
Sia G un gruppo di ordine 3000. Dimostrare che non è semplice. (Suggerimento: se $n_5(G) = 1$ ... se $n_5(G) > 1$ ...)

Esercizio 49 (Prova scritta, 13 Settembre 2018, eserc. 1).
Si determinino, a meno di isomorfismo, tutti i sottogruppi del gruppo simmetrico S_4, e si determini come si intersecano i 2-sottogruppi di Sylow di tale gruppo.

Esercizio 50 (Prova scritta, 13 Settembre 2018, eserc. 3).
Sia Ω l'insieme $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Per σ nel gruppo simmetrico S_3, e (a_1, a_2, a_3) in Ω, si ponga

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot \sigma = (a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}).$$

Si provi che in tal modo resta definita un'azione di S_3 su Ω; si determinino poi le orbite e il nucleo di tale azione.

Esercizio 51 (Prova scritta, 22 Novembre 2018, eserc. 3).
Dimostrare che un gruppo finito di ordine 108 ha un sottogruppo normale di ordine 9 o 27.

Esercizio 52 (Prova scritta, 28 Gennaio 2019, eserc. 2).
Sia G un gruppo di ordine $2^3 \cdot 3$.

(a) Provare che G ha un sottogrupppo normale di ordine 8, oppure un sottogruppo normale di ordine 4.

(b) Provare che, se G non ha un sottogruppo normale di ordine 8, allora ha un sottogruppo normale di ordine 12.

(c) Provare che, se G non ha un sottogruppo normale di ordine 8 *e non è isomorfo a* S_4, allora ha un sottogruppo normale *abeliano* di ordine 12.

Esercizio 53 (Prova scritta, 20 Febbraio 2019, eserc. 2).
Sia $G = S_n$, il gruppo simmetrico su n oggetti.

(a) Provare che, se $\sigma \in G$ ha periodo $2^s \cdot m$, con m dispari, allora si ha $\langle \sigma \rangle = \langle \sigma^m \rangle \times \langle \sigma^{2^s} \rangle$ (prodotto diretto interno).

(b) Provare che, per $\sigma \in G$, esiste una coppia $(\sigma_2, \sigma_{2'})$ di elementi di G con le seguenti proprietà: (i) $\sigma = \sigma_2 \cdot \sigma_{2'}$; (ii) σ_2 ha periodo una potenza di 2 e $\sigma_{2'}$ ha periodo dispari; (iii) σ_2 e $\sigma_{2'}$ commutano.

(c) Sia H un sottogruppo di G, e sia D un 2-sottogruppo di Sylow di H. Provare che H è contenuto nel gruppo alterno A_n se e solo se $D \leq A_n$. (Sugg.: si usi il punto precedente.)

Esercizio 54 (Prova scritta, 3 Maggio 2019, eserc. 2)**.**
Sia G un gruppo di ordine 2006 e sia data un'azione di G su un insieme S con $|S| = 20$. Si provi che G ha almeno tre orbite su S. Si computi il numero di orbite nel caso in cui G non abbia punti fissi.

Esercizio 55 (Prova scritta, 20 Giugno 2019, eserc. 1)**.**
Sia G un gruppo di ordine 99. Si provi che G é abeliano.

Inoltre potete fare tutti gli esercizi dei compitini degli anni scorsi.