

**ESERCIZI - FOGLIO 5**  
**MATEMATICA 1, SCIENZE AMBIENTALI**  
**ALGEBRA LINEARE**  
**A.A. 2021/2022**

**Esercizio 1.** Calcolare il determinante delle seguenti matrici.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 \\ 0 & 1 & 10 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 & 0 \\ 100 & 100 & 1 & 0 \\ 1000 & 100 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 100 & 10 & 1 \\ 10 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 10 \\ 1 & 10 & 100 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 2.** Rispetto a una vecchia versione, ho cambiato alcuni coefficienti che avevo sbagliato a scrivere. Mi spiace di aver sbagliato; ora l'esercizio è più veloce a risolversi (e alcune risposte sono diverse da prima). Grazie a chi me l'ha segnalato.

(1) I vettori  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  sono linearmente indipendenti? Sono una base di  $\mathbb{R}^3$ ? Generano  $\mathbb{R}^3$ ?

(2) Qual'è il rango della matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ ?

(3) I vettori  $(1, -2, 0)$ ,  $(0, 1, 1)$ ,  $(2, -3, 1)$  sono linearmente indipendenti? Sono una base di  $\mathbb{R}^3$ ? Generano  $\mathbb{R}^3$ ?

(4) Il vettore  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$  è combinazione lineare di  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ?

(5) Definiamo  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Il sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  ammette almeno una soluzione?

**Esercizio 3.** Il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 2x_4 - x_5 = 10 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 14x_4 + 3x_5 = -1 \\ 14x_1 + 12x_2 - 7x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 + \frac{1}{3}x_5 = 10 \end{cases}$$

è esattamente uno? (Non è necessario trovare le soluzioni del sistema.)

**Esercizio 4.** Quante soluzioni ammette il seguente sistema? (Specificare se una, nessuna, o infinite. Non è necessario trovare le soluzioni del sistema.)

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 14x_4 + 3x_5 = 0 \\ 14x_1 + 12x_2 - 7x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 + \frac{1}{3}x_5 = 0 \end{cases}$$

**Esercizio 5.** Quante soluzioni ha il sistema  $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 6 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ?

**Esercizio 6.** Risolvere il seguente sistema lineare.

$$\begin{cases} w + x - y + z = -3 \\ -w + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 1 \\ y - z = 1 \end{cases}$$