ESERCIZIO SFIDA

Ecco un esercizio difficile, solo per chi vuole raccogliere una sfida.

Dato un generico sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

considerate le seguenti condizioni:

Esistenza: Il sistema ammette almeno una soluzione;
Unicità: Il sistema ammette al massimo una soluzione.

Provare a risolvere i seguenti problemi (non è necessario in questo caso che motiviate la vostra risposta, ma solo che la "indoviniate").

(1) Trovare una condizione che sia equivalente alla condizione **Esistenza** e che utilizzi le nozioni di vettori e combinazioni lineari (o come meglio vi riesce utilizzando i concetti visti in classe): considerate in questo caso i vettori "colonna"

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ottenuti guardando le "colonne" di coefficienti del sistema.

(2) Trovare una condizione che sia equivalente alla condizione **Unicità** e che utilizzi le nozioni di sottospazio generato oppure di dipendenza/indipendenza lineare (o come meglio vi riesce utilizzando i concetti visti in classe). Per formulare tale condizione considerate in questo caso i vettori "riga"

$$\begin{gathered} (a_{11},\ a_{12}, \ldots, a_{1n}) \\ (a_{21},\ a_{22}, \ldots, a_{2n}) \\ \vdots \\ (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}) \end{gathered}$$

ottenuti guardando le "righe" di coefficienti nel sistema (coefficienti b_i esclusi).

Se ci riuscite, complimenti: ora avete un criterio in termini algebrici per esprimere il numero di soluzioni di un sistema: il sistema ha esattamente una soluzione quando **Esistenza** e **Unicità** valgono entrambe, nessuna soluzione quando **Esistenza** non vale, infinite soluzioni quando **Unicità** non vale.

Date: 20 ottobre 2021.