LOGICA MATEMATICA
A.A. 2021/2022

ESERCIZI SU
LOGICA PROPOSIZIONALE

Esercizio 1. Scrivere le tavole di verità delle seguenti proposizioni. (Si veda p. 14 delle dispense per le tavole di verità.)

(1) $\neg(p \to p)$.
(2) $p \to (q \vee p)$.
(3) $p \wedge q \wedge r$.
(4) $(p \to q) \vee (q \to p)$.
(5) $(p \to (q \to r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \to r)$.
(6) $p \vee q \vee r$.
(7) $p \to q$.
(8) $\perp \to p$. [1]

Soluzione.

(1)

p	$p \to p$	$\neg(p \to p)$
0	1	0
1	1	0

(2)

p	q	$q \vee p$	$p \to (q \vee p)$
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

(3)

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \vee (q \to p)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Date: 19 ottobre 2022.

[1] Questa proposizione è conosciuta come "Ex falso sequitur quodlibet" (dal falso segue qualsivoglia cosa.)

(4)

p	q	r	$p \wedge q \wedge r$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

(5)

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

(6)

p	$\perp \to p$
0	1
1	1

(7)

p	q	r	$p \vee q \vee r$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

□

Esercizio 2. Stabilire la complessità delle seguenti formule.

(1) $(((\neg p) \wedge q) \wedge (\neg q))$.
(2) $((p \wedge q) \wedge (r \wedge s))$.
(3) $((p \wedge q) \wedge (\neg r))$.

Esercizio 3. Stabilire quali tra le seguenti proposizioni sono tautologie, quali sono contraddizioni, quali sono soddisfacibili. (Si vedano Def. 2.35, 2.37.)

(1) $(p \to q) \vee (q \to p)$.
(2) $(p \vee q) \to (\neg p \wedge r)$.
(3) $(p \leftrightarrow p) \to (q \leftrightarrow \neg q)$.

(4) $p \to \neg p$.
(5) $\neg(p \to p)$.
(6) $p \leftrightarrow \neg p$.
(7) $p \to (q \vee p)$.
(8) $p \wedge q \wedge r$.
(9) $p \vee q \vee r$.
(10) $\bot \to p$.
(11) $p \to q$.
(12) $p \to p$.
(13) $(\neg p \to p) \to p$.
(14) $\neg\neg p \to p$.
(15) $p \to \neg\neg p$.
(16) $(\neg p \vee \neg q) \to (p \to \neg q)$.
(17) $(p \wedge q) \to (p \to q)$.
(18) $(p \vee q) \to (p \to q)$.

Soluzione. (1) $(p \to q) \vee (q \to p)$ è una tautologia, è soddisfacibile, non è una contraddizione.
(2) $(p \vee q) \to (\neg p \wedge r)$ è soddisfacibile, non è una tautologia, non è una contraddizione. Per verificare che è soddisfacibile basta refutare le ipotesi (oppure soddisfare le conclusioni) dell'implicazione.
(3) $(p \leftrightarrow p) \to (q \leftrightarrow \neg q)$ è insoddisfacibile, è una contraddizione, non è una tautologia. Infatti, $(p \leftrightarrow p) \to (q \leftrightarrow \neg q) \equiv \top \to \bot \equiv \bot$.
(4) $p \to \neg p$ è soddisfacibile (si prenda la valutazione $p \to 0$), non è una tautologia (si prenda la valutazione $p \to 1$), non è una contraddizione (poichè è soddisfatta dalla valutazione $p \to 0$).
(5) $\neg(p \to p)$ non è soddisfacibile, non è una tautologia, è una contraddizione.
(6) $p \leftrightarrow \neg p$ non è soddisfacibile, non è una tautologia, è una contraddizione.
(7) $p \to (q \vee p)$ è soddisfacibile, è una tatutologia, non è una contraddizione.
(8) $p \wedge q \wedge r$ è soddisfacibile, non è una tautologia, non è una contraddizione.
(9) $p \vee q \vee r$ è soddisfacibile, non è una tautologia, non è una contraddizione.
(10) $\bot \to p$ è soddisfacibile, è una tautologia, non è una contraddizione.
(11) $p \to q$ è soddisfacibile, non è una tautologia, non è una contraddizione.
(12) $p \to p$ è tautologia, soddisfacibile, non contraddizione.
(13) $(\neg p \to p) \to p$ è tautologia, soddisfacibile, non contraddizione.
(14) $\neg\neg p \to p$ è tautologia, soddisfacibile, non contraddizione.
(15) $p \to \neg\neg p$ è tautologia, soddisfacibile, non contraddizione.

$\square$

Esercizio 4. Stabilire quali dei seguenti insiemi di formule è soddisfacibile, nel senso che c'è una valutazione delle lettere proposizionali che rende tutte le formule vere. (Si veda Def. 2.33.)

(1) $\Gamma = \{\ p \to q, \quad q \to r, \quad r \to \neg p\ \}$.

(2) $\Gamma = \{ \ p \to q, \quad (p \lor q) \land \neg(p \lor q) \ \}$.
(3) $\Gamma = \{ \ p \lor \neg q, \quad \neg(q \land p), \quad q \ \}$.
(4) $\Gamma = \{ \ p_0 \to q_0, \quad p_0 \land p_1 \to q_0 \lor q_1, \quad p_0 \land p_1 \land p_2 \to q_0 \lor q_1 \lor q_2, \quad \dots \}$.
(5) $\Gamma = \{ \ p \leftrightarrow q, \quad p \to \neg q, \quad \neg p \to q \ \}$.
(6) $\Gamma = \{ \ p \to q, \neg q \ \}$.
(7) $\Gamma = \{ \ \neg(\neg q \lor p), \quad p \lor \neg r, \quad q \to \neg r \ \}$.
(8) $\Gamma = \{ \ (\neg p \land q) \to r, \quad p \to (\neg p \to q), \quad p \leftrightarrow \neg q \ \}$.

Soluzione. Per gli insiemi finiti, un metodo di risoluzione che funziona sempre è fare le tavole di verità. Però questo metodo potrebbe essere molto lungo. Quando possibile, utilizzeremo delle scorciatoie.

(1) Soddisfacibile.
Ad esempio, valutando p, q e r come false, tutti gli elementi di Γ sono resi veri, perché sono implicazioni con antecedente falsa. (Ci sono altre valutazioni che rendono vere Γ, ad esempio $p \mapsto 0$, $q \mapsto 1$, $r \mapsto 1$.)
(2) Insoddisfacibile.
L'elemento $(p \lor q) \land \neg(p \lor q)$ di Γ è della forma "$\varphi \lor \neg\varphi$", e quindi è falso per qualsiasi valutazione di p e q.
In alternativa: affinché $(p \lor q) \land \neg(p \lor q)$ sia vero, è necessario che $\neg(p \lor q)$ sia vero, cioè che $p \lor q$ sia falso, cioè che sia p che q siano false. Quindi l'unica valutazione che ha una chance di soddisfare Γ è $p \mapsto 0$, $q \mapsto 0$. Ma uno osserva che la valutazione $p \mapsto 0$, $q \mapsto 0$ rende falso $p \lor q$ e perciò anche $(p \lor q) \land \neg(p \lor q)$, cioè il secondo elemento dell'insieme. Perciò, l'insieme di formule è insoddisfacibile.
(3) Insoddisfacibile.
Affinché Γ sia soddisfatta, q deve essere vera; ma in questo caso $\neg q$ è falsa, e perciò, affinché $p \lor \neg q$ sia vera, p deve essere vera. In fatti, la valutazione $p \mapsto 1$, $q \mapsto 0$ rende vere tutte le formule di Γ; ma allora $\neg(q \land p)$ è falsa.
(4) Soddisfacibile.
Ad esempio: ponendo ogni p_i falsa e le q_i a piacere. Oppure: ponendo ogni q_i vera e le p_i a piacere.
(5) Insoddisfacibile. L'ultimo elemento di Γ è equivalente a $\neg q \to p$. Messa assieme al secondo elemento, si ottiene $p \leftrightarrow \neg q$. Messa assieme al primo elemento, si deduce $q \leftrightarrow \neg q$, che non può essere soddisfatto.
(6) L'insieme $\{p \to q, \neg q\}$ è soddisfacibile: si consideri la valutazione $p \mapsto 0$, $q \mapsto 0$.

□

Esercizio 5. Si dimostri o confuti la seguente affermazione: per ogni insieme Γ di formule proposizionali, Γ è soddisfacibile se e solo se ogni formula di Γ è soddisfacibile.

Soluzione. Falso. Controesempio: $\Gamma = \{p, \neg p\}$. □

Esercizio 6. Usando le tavole di verità, stabilire se le seguenti conseguenze logiche sono corrette. (Si veda Def. 2.16.)

(1) $(p \wedge \neg q) \to \bot \vDash p \to q$. [2] [3]
(2) $\{p \to q, \neg q\} \vDash \neg p$.
(3) $p \wedge q \vDash p \vee q$.
(4) $\{p \to q, q \to r\} \vDash p \to r$. [4]
(5) $p \vee q \vDash p \wedge q$.
(6) $p \to \neg p \vDash \neg p$.
(7) $\vDash p$.
(8) $p \to q \wedge r \vDash (p \to q) \to r$.
(9) $p \vee (\neg q \wedge r) \vDash (q \vee \neg r) \to p$.
(10) $p \to (q \to r) \vDash (p \to q) \to r$.
(11) $(p \to q) \to r \vDash p \to (q \to r)$.

Soluzione. (1) La consequenza logica $(p \wedge \neg q) \to \bot \vDash p \to q$ è corretta.

(2) La consequenza logica $\{p \to q, \neg q\} \vDash \neg p$ è corretta poiché, in ogni riga in cui sia $p \to q$ che $\neg q$ sono valutati 1, la proposizione $\neg p$ è valutata 1.

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

(3) La consequenza logica è corretta poiché, in ogni riga in cui $p \wedge q$ è valutata 1, $p \vee q$ è valutata 1.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

(4) La conseguenza logica è corretta.
(5) La conseguenza logica non è corretta poichè, quando ad esempio p è valutata 0 e q è valutata 1, $p \vee q$ è valutata 0 e $p \wedge q$ è valutata 1.
(6) La consequenza logica è corretta.

p	$p \to \neg p$	$\neg p$
0	1	1
1	0	0

[2] Per convenzione, questo significa $\{(p \wedge \neg q) \to \bot\} \vDash p \to q$: le graffe vengono soppresse perché l'insieme è un singoletto.
[3] Questo è il ragionamento per assurdo.
[4] Questa è la transitività dell'implica.

(7) La consequenza logica non è corretta, come testimoniato dalla valutazione $p \mapsto 0$.

□

Esercizio 7. Stabilire se le seguenti coppie di formule proposizionali sono logicamente equivalenti. (Si veda Def. 2.17.)

(1) $p \to q$ e $\neg q \to \neg p$. [5]
(2) $p \to \neg d$ e $d \to \neg p$. [6]
(3) $(p \to q) \to r$ e $p \to (q \to r)$.
(4) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$ e $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$.
(5) $p \to q$ e $q \to p$.
(6) $(p \to q) \land \neg p$ e $\neg p$.
(7) $p \to \neg p$ e $\neg p$.
(8) $\neg(p \land q)$ e $\neg p \lor \neg q$.
(9) $\neg(p \lor q)$ e $\neg p \land \neg q$.
(10) $p \leftrightarrow q$ e $(p \to q) \land (q \to p)$.
(11) $\neg p \lor q$ e $\neg q \lor p$.
(12) $\neg(p \leftrightarrow q)$ e $p \leftrightarrow \neg q$.
(13) $p \lor (q \leftrightarrow r)$ e $(p \lor q) \leftrightarrow (p \lor r)$.
(14) $p \to (q \leftrightarrow r)$ e $(p \to q) \leftrightarrow (p \to r)$.
(15) $p \land (q \leftrightarrow r)$ e $(p \land q) \leftrightarrow (p \land r)$.
(16) $p \to q$ e $\neg p \lor q$.
(17) $p \to q$ e $\neg(p \land \neg q)$.

Soluzione. (1) $p \to q$ e $\neg q \to \neg p$ sono logicamente equivalenti (ogni implicazione è equivalente alla sua contronominale).

(2) $p \to \neg d$ e $d \to \neg p$ sono logicamente equivalenti, poichè hanno le stesse tavole di verità. In alternativa, si può ragionare così: dato che ogni implicazione è equivalente alla sua contronominale, $p \to \neg d$ è equivalente a $\neg\neg d \to \neg p$, che equivalente $d \to \neg p$ perchè ogni formula è equivalente alla sua doppia negazione.

(3) $(p \to q) \to r$ e $p \to (q \to r)$ non sono logicamente equivalenti, come testimoniato ad aesempio dalla valutazione $p \mapsto 0$, $q \mapsto 1$, $r \mapsto 0$, che rende falsa la prima implicazione e vera la seconda. Questo significa che l'implica non è associativo.

(4) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$ e $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$ sono logicamente equivalenti. Ciò vuol dire che il se e solo se è associativo.

(5) $p \to q$ e $q \to p$ non sono logicamente equivalenti. Ad esempio, la valutazione $p \mapsto 0$, $q \mapsto 1$ rende vera la prima formula, ma falsa la seconda.

---

[5] L'implicazione $\neg q \to \neg p$ è chiamata la contronominale $p \to q$.

[6] Queste due proposizioni sono ispirate al detto "chi ha il pane non ha i denti ($d \to \neg p$), chi ha i denti non ha il pane ($p \to \neg d$)", che è composta da due proposizioni logicamente equivalenti, rendendo il detto ridondante (anche se potrebbe non sembrare).

(6) $p \to \neg p$ e $\neg p$ sono logicamente equivalenti. Si può osservare dalle tavole di verità. Oppure, si può notare che $(p \to q) \wedge \neg p$ è equivalente a $(\neg p \vee q) \wedge \neg p$, che è equivalente a $\neg p$ per la legge di Assorbimento 2 (Esempio 2.32).
(7) $p \to \neg p$ e $\neg p$ sono logicamente equivalenti.
(8) Logicamente equivalenti. È una delle due leggi di De Morgan.
(9) Logicamente equivalenti. È l'altra delle due leggi di De Morgan.

□

Esercizio 8. Si stabilisca se i seguenti insiemi di formule proposizionali sono coerenti.

(1) $\{\varphi \to \psi, \varphi, \psi\}$.
(2) $\{\varphi \to \psi, \neg\psi\}$.

Esercizio 9. (Esercizio 2.65, p. 39) Dimostrare che, se Σ è un insieme di formule massimalmente coerente, allora per ogni coppia di formule φ, ψ vale che $\varphi \to \psi \in \Sigma$ sse $\varphi \notin \Sigma$ o $\psi \in \Sigma$.

Soluzione. Ricordiamo che un insieme di formule Σ p massimalmente coerente se è coerente (cioè $\Sigma \nvdash \bot$) e $\sigma \cup \{\varphi\}$ è incoerente per ogni $\varphi \notin \Sigma$.

[$\Rightarrow$] Supponiamo $\varphi \to \psi \in \Sigma$. Mostriamo che $\varphi \notin \Sigma$ o $\psi \in \Sigma$. Cioè dobbiamo mostrare che se $\varphi \in \Sigma$, allora $\psi \in \Sigma$. Supponiamo $\varphi \in \Sigma$. Poichè $\varphi \in \Sigma$ e $\varphi \to \psi \in \Sigma$, allora $\Sigma \vdash \psi$ e quindi (Prop. 2.64) $\psi \in \Sigma$.

[$\Leftarrow$]. Supponiamo $\varphi \notin \sigma$ o $\psi \in \Sigma$.

(1) Caso $\varphi \notin \Sigma$. Allora $\neg\varphi \in \Sigma$ (Prop. 2.64). Allora $\Sigma \vdash (\varphi \to \psi)$. Allora $\varphi \to \psi \in \Sigma$.
(2) Caso $\psi \in \Sigma$. Allora $\Sigma \vdash (\varphi \to \psi)$. Allora $\varphi \to \psi \in \Sigma$.

□

Esercizio 10. Si mostri che $\varphi \wedge \psi \vdash \sigma$ sse $\varphi \vdash \psi \to \sigma$.

Esercizio 11. (1) Si verifichi che, se $\varphi \to \psi$ è una tautologia e gli insiemi di variabili in φ e ψ sono disgiunti, allora φ è insoddisfacibile oppure ψ è una tautologia.
(2) Si può rimuovere dall'affermazione precedente l'ipotesi che richiede che gli insiemi di variabili in φ e ψ siano disgiunti?

Soluzione. (1) Basta dimostrare che se gli insiemi di variabili in φ e ψ sono disgiunti, se φ è soddisfacibile e ψ non è una tautologia, allora $\varphi \to \psi$ non è una tautologia. Supponiamo quindi che gli insiemi di variabili in φ e ψ sono disgiunti, che φ è soddisfacibile e che ψ non è una tautologia. Allora esiste una valutazione ν delle variabili di φ che rende φ vera, e una valutazione μ delle variabili di ψ che rende ψ falsa. Dato che gli insiemi di variabili in φ e ψ sono disgiunti, possiamo combinare ν e μ ottenendo una valutazione delle variabili che appartengono a φ o ψ che rende vera φ e falsa ψ, e che quindi rende falsa $\varphi \to \psi$. Questo mostra che $\varphi \to \psi$ non è una tautologia.

(2) No. Controesempio: $p \to p$.

□

Ricorda che una formula proposizionale φ è detta in *forma normale*...

- ... *congiuntiva* se $\varphi = \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_k$, dove ciascun ψ_i è una disgiunzione di variabili proposizionali e negazioni di variabili proposizionali.
- ... *disgiuntiva* se $\varphi = \psi_1 \vee \cdots \vee \psi_k$, dove ciascun ψ_i è una congiunzione di variabili proposizionali e negazioni di variabili proposizionali.

Esercizio 12. Per ognuna delle seguenti formule proposizionali, scriverne una equivalente in forma normale disgiuntiva (alcune sono già scritte in forma normale disgiuntiva). (Si veda Def. 2.21.)

(1) $p \wedge (q \vee r)$.
(2) $\neg p \leftrightarrow q$.
(3) $(p \vee q) \to r$.
(4) $\neg(\neg p \vee (q \to r))$.
(5) $p \vee q$.
(6) $p \wedge q$.
(7) $p \wedge (p \to q)$.
(8) $((p \vee q) \wedge r) \vee s$.
(9) $(p \to q) \wedge (q \to p)$.
(10) $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$.
(11) $\neg(p \to q) \vee (\neg p \wedge r)$.
(12) $p \leftrightarrow ((q \wedge \neg p) \vee r)$.
(13) $(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$.
(14) $\neg p \vee (q \to \neg r)$.
(15) $(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge r)$.
(16) $(p \vee q) \leftrightarrow \neg r$.
(17) $\neg(p \leftrightarrow q)$.
(18) $((p \to q) \to q) \to q$.
(19) $(p \to (p \wedge \neg q)) \wedge (q \to (q \wedge \neg p))$.

Soluzione. La soluzione si può trovare con l'utilizzo delle tavole di verità oppure utilizzando alcuni schemi di tautologie (in particolare le leggi di de Morgan, le leggi distributive, la legge della doppia negazione, si veda Esempio 2.32). Ricordo che la forma normale disgiuntiva (così come quella congiuntiva) non è unica: diverse formule in forma normale disgiuntiva possono avere la stessa forma.

(1). FNC: $p \wedge (q \vee r)$ è già in forma normale congiuntiva.

FND: Troviamo ora la forma normale disgiuntiva. Utilizzando le tavole di verità, come in Esempio 2.23.

p	q	r	$(q \vee r)$	$p \wedge (q \vee r)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Quindi otteniamo la forma normale disgiuntiva: $(p \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$.

Soluzione alternativa: utilizzando la legge di distributività (si veda Esempio 2.32): $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

(2). FND:

$\neg p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \to q) \wedge (q \to \neg p) \equiv (\neg\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p) \equiv (p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \equiv (p \wedge \neg q) \vee \perp \vee \perp \vee (q \wedge \neg p) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$.

Oppure posso ragionare così: un "se e solo se" è vero se e solo se entrambi i lati sono veri oppure entrambi i lati sono falsi. Perciò, $\neg p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \wedge q) \vee (\neg\neg p \wedge \neg q) = (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$.

Oppure utilizziamo le tavole di verità.

p	q	$\neg p \leftrightarrow q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Otteniamo $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$.

FNC:

$\neg p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \to q) \wedge (q \to \neg p) \equiv (\neg\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p) \equiv (p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)$.

Oppure si può ottenere dalla tavola di verità.

(3). $(p \vee q) \to r \equiv \neg(p \vee q) \vee r \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r$. (FND.)

FNC: $(\neg p \wedge \neg q) \vee r \equiv (\neg p \vee r) \wedge (q \vee r)$.

Oppure, con la tavola di verità.

p	q	r	$(p \vee q) \to r$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

FND: $(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$.

FNC: $(p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$.

(4). Tavola di verità.

p	q	r	$\neg(\neg p \vee (q \to r))$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

FND: $(\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$.

FNC: $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r)$.

Oppure, usando le varie leggi per evitare la tavola di verità.

$\neg(\neg p \wedge (q \to r)) \equiv \neg\neg p \vee \neg(q \to r) \equiv p \vee \neg(\neg q \vee r) \equiv p \vee (\neg\neg q \wedge \neg r) \equiv p \vee (q \wedge \neg r)$. (FND.)

FNC: $p \vee (q \wedge \neg r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee \neg r)$.

(5). È già sia in forma normale disgiuntiva che in forma normale congiuntiva.

(6). È già sia in forma normale disgiuntiva che in forma normale congiuntiva.

(7). FND: $p \wedge (p \to q) \equiv p \wedge (\neg p \vee q) \equiv (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \equiv \bot \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge q$. Vale anche come forma normale congiuntiva. □

Esercizio 13. È facile vedere che ogni insieme parzialmente ordinato su un insieme finito può essere esteso a un ordine totale. Si utilizzi il teorema di compattezza per mostrare che questo risultato è vero anche per insiemi infiniti.

Soluzione. Sia P un insieme parzialmente ordinato. Prendiamo come insieme di variabili proposizionali l'insieme $P \times P$. Per evitare confusione, denotiamo un elemento

(a, b) di $P \times P$ pensato come variabile proposizionale con $\varphi_{a,b}$. Poniamo

$$\begin{aligned} T \coloneqq {} & \{\varphi_{a,b} \mid a, b \in P, a \leq b\} \cup \\ & \cup \{\varphi_{a,b} \vee \varphi_{b,a} \mid a, b \in P\} \cup \\ & \cup \{(\varphi_{a,b} \wedge \varphi_{b,c}) \to \varphi_{a,c} \mid a, b, c \in P\} \cup \\ & \cup \{\neg\varphi_{a,b} \vee \neg\varphi_{a,b} \mid a, b \in P,\ a \neq b\}. \end{aligned}$$

L'idea è che un modello di T codifica un insieme parzialmente ordinato che estende P. Infatti, dato un modello di $\nu\colon P \times P \to \{0, 1\}$ di T (dimostreremo che esiste), otteniamo un insieme parzialmente ordinato Q che estende P ponendo $a \leq b$ se e solo se $\nu(\varphi_{a,b}) = 1$. La prima riga nella definizione di T codifica che Q estende P, la seconda codifica che Q è totale, la terza che Q è transitivo, la quarta che Q è antisimmetrico.

Poichè ogni insieme parzialmento ordinato su un insieme finito può essere esteso a un ordine totale, T è finitamente soddisfacibile. Per il teorema di compattezza, T è soddisfacibile, cioè ha un modello, cioè esiste un insieme parzialmente ordinato Q che estende P ponendo $a \leq b$ se e solo se $\nu(\varphi_{a,b}) = 1$. □

Per ottenere una deduzione naturale, un metodo che solitamente funziona è provare a dimostrare in modo informale ciò che bisogna dimostrare, e poi formalizzarlo. Quindi bisogna partire dalla domanda: "Se volessi dimostrare questo fatto, cosa farei?". Solitamente le difficoltà sono date dall'utilizzo del ragionamento per assurdo.

Esercizio 14. Utilizzando le regole della deduzione naturale, produrre derivazioni per i seguenti fatti: (Si veda la Tabella 2 a pag. 30)

(1) $\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi)$.
Soluzione:

$$\mathrm{I}{\to}_1\,\dfrac{\mathrm{I}{\to}_2\,\dfrac{[\varphi]^1}{\psi \to \varphi}}{\varphi \to (\psi \to \varphi)}$$

(L'assunzione $[\psi]^2$ non è scritta perché non viene usata.)

(2) $\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$.
Soluzione:

$$\mathrm{I}{\to}_1\,\dfrac{\mathrm{I}\neg_2\,\dfrac{\mathrm{E}\neg\,\dfrac{\mathrm{E}{\to}\,\dfrac{\varphi \to \psi \qquad [\varphi]^2}{\psi} \qquad [\neg\psi]^1}{\bot}}{\neg\varphi}}{\neg\psi \to \neg\varphi}$$

(3) $\neg\psi \to \neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$.
Soluzione:

$$\mathrm{I}{\to}_1\ \dfrac{\mathrm{RA}_2\ \dfrac{\mathrm{E}\neg\ \dfrac{\mathrm{E}{\to}\ \dfrac{\neg\psi \to \neg\varphi \qquad [\neg\psi]^2}{\neg\varphi} \qquad [\varphi]^1}{\bot}}{\psi}}{\varphi \to \psi}$$

(4) $\vdash \neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$.
Soluzione:

$$\mathrm{I}{\leftrightarrow}_1\ \dfrac{\mathrm{RA}_2\ \dfrac{\mathrm{E}\neg\ \dfrac{[\neg\neg\varphi]^1 \qquad [\neg\varphi]^2}{\bot}}{\varphi} \qquad \mathrm{I}\neg_3\ \dfrac{\mathrm{E}\neg\ \dfrac{[\varphi]^1 \qquad [\neg\varphi]^3}{\bot}}{\neg\neg\varphi}}{\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi}$$

(5) $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi \vee \psi$.
Soluzione:

$$\mathrm{I}\vee\ \dfrac{\mathrm{E}\wedge\ \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}}{\varphi \vee \psi}$$

(6) $\varphi \wedge \psi \vdash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$.
Soluzione:

$$\mathrm{I}\neg_1\ \dfrac{\mathrm{E}\vee_2\ \dfrac{[\neg\varphi \vee \neg\psi]^1 \qquad \mathrm{E}\neg\ \dfrac{[\neg\varphi]^2 \qquad \mathrm{E}\wedge_{Sx}\ \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}}{\bot} \qquad \mathrm{E}\neg\ \dfrac{[\neg\psi]^2 \qquad \mathrm{E}\wedge_{Dx}\ \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}}{\bot}}{\bot}}{\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)}$$

(7) $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$.
Soluzione:

$$\mathrm{RA}_1\ \dfrac{\mathrm{E}\neg\ \dfrac{\mathrm{RA}_2\ \dfrac{\mathrm{E}\neg\ \dfrac{\mathrm{I}\vee\ \dfrac{[\neg\varphi]^2}{\varphi \vee \neg\varphi} \qquad [\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1}{\bot}}{\varphi} \qquad \mathrm{I}\neg_3\ \dfrac{\mathrm{E}\neg\ \dfrac{\mathrm{I}\vee\ \dfrac{[\varphi]^3}{\varphi \vee \neg\varphi} \qquad [\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1}{\bot}}{\neg\varphi}}{\bot}}{\varphi \vee \neg\varphi}$$

(8) $\varphi \vee \psi \vdash \psi \vee \varphi$.
Soluzione:

$$\mathrm{RA}_1\ \dfrac{\mathrm{E}\vee_2\ \dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \mathrm{E}\neg\ \dfrac{\mathrm{I}\vee\ \dfrac{[\varphi]^2}{\psi \vee \varphi} \qquad [\neg(\psi \vee \varphi)]^1}{\bot} \qquad \mathrm{E}\neg\ \dfrac{\mathrm{I}\vee\ \dfrac{[\psi]^2}{\psi \vee \varphi} \qquad [\neg(\psi \vee \varphi)]^1}{\bot}}{\bot}}{\psi \vee \varphi}$$

(9) $\varphi \vee \psi, \psi \to \sigma \vdash \varphi \vee \sigma$.
Soluzione:

$$\mathrm{RA}_1\,\dfrac{\mathrm{E}\vee_2\,\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \mathrm{E}\neg\,\dfrac{\mathrm{I}\vee\,\dfrac{[\varphi]^2}{\varphi \vee \sigma} \qquad [\neg(\varphi \vee \sigma)]^1}{\bot} \qquad \mathrm{E}\neg\,\dfrac{\mathrm{I}\vee\,\dfrac{\mathrm{E}\!\to\,\dfrac{[\psi]^2 \qquad \psi \to \sigma}{\sigma}}{\varphi \vee \sigma} \qquad [\neg(\varphi \vee \sigma)]^1}{\bot}}{\bot}}{\varphi \vee \sigma}$$

(10) $\varphi \to (\psi \to \chi) \vdash (\varphi \wedge \psi \to \chi)$.
(11) $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma))$.
(12) $(\varphi \to (\psi \to \sigma)) \vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma)$.
(13) $\vdash (\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$.
(14) $\varphi \to (\psi \to \sigma), \varphi, \neg\sigma \vdash \neg\psi$.
(15) $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \vdash (\varphi \vee \psi) \to (\varphi \wedge \psi)$.
(16) $(\varphi \vee \psi) \to (\varphi \wedge \psi) \vdash (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$.
(17) $\neg\varphi \wedge \neg\psi \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$.
(18) $(\psi \to \sigma) \wedge (\psi \vee \varphi) \vdash (\varphi \to \psi) \to (\sigma \wedge \psi)$.
(19) $\varphi \to \psi, \varphi \wedge \neg\psi \vdash \sigma$.
(20) $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \wedge \sigma) \to (\psi \wedge \sigma))$.
(21) $\varphi \to (\psi \wedge \sigma) \vdash (\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \sigma)$.
(22) $\varphi \to (\varphi \to \psi), \varphi \vdash \psi$.
(23) $\varphi \to (\psi \to \sigma) \vdash \psi \to (\varphi \to \sigma)$.
(24) $\neg\varphi \vee \psi \vdash \varphi \to \psi$.
(25) $\bot \vdash \varphi$.
(26) $\varphi \vdash \neg\varphi \to \psi$.

(Segnalo dove si usa il ragionamento per assurdo negli esercizi sopra: in (3), nell'implicazione $\to$ di (4), in (7), in (25) (btw, in alcuni testi $\bot \vdash \varphi$ viene presa come regola di eliminazione di $\bot$ (in analogia alla regola di eliminazione di $\vee$)), in (26) (per dedurre ψ da $\bot$), in (9) (per dedurre ψ da $\bot$), in (19) (per dedurre r da $\bot$), in (24) (per dedurre q da $\bot$).)

Esercizio 15. Utilizzando le regole della deduzione naturale, produrre una derivazione per

$$\neg\neg(p \wedge q) \vdash p$$

e stabilire la lunghezza della derivazione trovata.

1. Qualche indovinello

Segnalo alcuni indovinelli collegato alla logica proposizionale. Provare a risolverli non è un modo efficiente per prepararsi all'esame, quindi date più importanza agi altri esercizi. Però è più divertente.

L'ultimo di questi indovinelli (Esercizio 19) ha ricevuto il titolo di "indovinello più difficile del mondo" (almeno secondo Wikipedia). Gli indovinelli precedenti sono utili per risolverlo.

Esercizio 16. Un certo stato è abitato solamente da veritieri (= persone che dicono sempre la verità) e bugiardi (= persone che mentono sempre). Inoltre, le persone rispondono solo a domande *con risposta sì o no*. Un turista arriva a un bivio in cui una strada porta alla capitale e l'altra no. Non c'è alcuna indicazione su quale strada prendere, ma c'è un nativo al bivio. Quale domanda alla quale rispondere con sì o no potrebbe fare il turista per determinare quale strada prendere?

Suggerimento: Sia

$$P \coloneqq \text{ "Sei un veritiero."}$$

e sia

$$Q \coloneqq \text{ "Il bivio di sinistra porta alla capitale.".}$$

Costruire, con l'aiuto di un'opportuna tavola di verità, una formula proposizionale φ con lettere proposizionali P e Q tale per cui la risposta del nativo alla domanda "φ?" sia "sì" se e solo se Q è vera.

Esercizio 17. Un turista si reca in uno stato i cui abitanti parlano una lingua in cui le parole "sì" e "no" si dicono "ja" e "da", ma il turista non sa quale di questi termini corrisponda a "sì" e quale a "no". Nonostante i nativi capiscano la lingua del turista, essi parlano sempre nella propria lingua. Il turista arriva a un bivio in cui una strada porta alla capitale e l'altra no. Non c'è alcuna indicazione su quale strada prendere, ma c'è un nativo al bivio. Quale domanda alla quale rispondere con sì o no potrebbe fare il turista per determinare quale strada prendere?

Suggerimento: Sia

$$R \coloneqq \text{ "Il termine "ja" della vostra lingua corrisponde al termine "sì" nella mia lingua."}$$

e sia

$$S \coloneqq \text{ "Il bivio di sinistra porta alla capitale.".}$$

Costruire, con l'aiuto di un'opportuna tavola di verità, una formula proposizionale ψ con lettere proposizionali R e S tale per cui la risposta del nativo alla domanda "ψ?" sia "ja" se e solo se S è vera.

Esercizio 18. In un certo stato ci sono due tipi di persone: veritieri (che dicono sempre la verità), e imprevedibili (che rispondono il vero o il falso in modo casuale). Un turista si trova a un bivio in cui una strada porta alla capitale e l'altra no. Al bivio ci sono tre nativi: il turista sa che uno si chiama Valerio, uno Marco e uno Ivo, e che Valerio e Marco sono veritieri, mentre Ivo è imprevedibile, ma non sa chi sia chi. Come può il turista, ponendo tre domande dalla risposta "sì o no", stabilire il nome di ciascuno?

(Non è necessario porre le domande a persone diverse. Si può decidere una domanda e l'interlocutore a seconda delle risposte avute in precedenza.)

Esercizio 19. (L'indovinello più difficile del mondo secondo Wikipedia (https://it.wikipedia.org/wiki/L%27indovinello_pi%C3%B9_difficile_del_mondo).) Tre oracoli divini A, B, e C sono chiamati, in un qualche ordine, Verace, Mendace e Imprevedibile. Verace dice sempre il vero, Mendace dice sempre il falso, mentre Imprevedibile decide se essere sincero o meno in modo completamente casuale. L'obiettivo del gioco è determinare le identità di A, B, e C ponendo loro tre domande a cui è possibile rispondere con un "sì" o con un "no". Ogni domanda deve essere posta a uno solo degli oracoli, che, pur comprendendo l'italiano, risponderà sempre nella propria lingua con le parole "da" o "ja". Non si sa quale di questi termini corrisponda a "sì" e quale a "no".

Suggerimento: la soluzione è la stessa di Esercizio 18, ma ciascuna domanda va modificata come negli Esercizi 16 e 17.