LOGICA MATEMATICA
A.A. 2021/2022

ESERCIZI SU
LOGICA DEL PRIM'ORDINE

1. Formalizzazioni al prim'ordine

Esercizio 1.1. Formalizzare al prim'ordine la classe dei gruppi.

Esercizio 1.2. Fornire un'assiomatizzazione al prim'ordine dei gruppi privi di torsione.

Bozza di soluzione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, prendiamo il seguente assioma.

$$\forall x(\neg(x = 1) \to \neg(\underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ volte}} = 1))$$

Esercizio 1.3. Formalizzare al prim'ordine la classe degli ordini parziali.

Esercizio 1.4. Formalizzare al prim'ordine la classe dei grafi direttati. (per grafi direttati intendiamo che ogni arco ha una direzione; inoltre ammettiamo al più un arco tra due nodi; inoltre ammettiamo che ogni nodo possa avere o possa non avere un arco verso sè stesso.)

Esercizio 1.5. Si consideri il laguaggio degli ordini parziali. Si definiscano delle formule che esprimano:
(a) x è il massimo;
(b) x è massimale;
(c) x è strettamente minore di y;
(d) z è l'inf di x e y.
(e) non c'è elemento strettamente compreso tra x e y.

Esercizio 1.6. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, esibire un enunciato al primo ordine che esprima il fatto che in una struttura ci sono almeno n elementi.

Esercizio 1.7. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, esibire un enunciato al primo ordine che esprima il fatto che in una struttura ci sono al massimo n elementi.

Esercizio 1.8. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, esibire un enunciato al primo ordine che esprima il fatto che in una struttura ci sono esattamente n elementi.

Esercizio 1.9. Fornire un'assiomatizzazione al prim'ordine (con infiniti assiomi) per ciascuna delle seguenti classi:
(a) gruppi privi di torsione;
(b) grafi aciclici (per grafi intendiamo i grafi direttati, cioè ogni arco ha una direzione; inoltre ammettiamo al più un arco tra due nodi.).

Date: 1 dicembre 2022.

Esercizio 1.10. (a) Mostrare che, data una struttura finita $\mathfrak{A}$ per un linguaggio finito, "essere isomorfo ad $\mathfrak{A}$" è definibile con un enunciato al prim'ordine.

(b) Mostrare che esiste una struttura infinita $\mathfrak{A}$ per un linguaggio (finito o infinito) tale che "essere isomorfo ad $\mathfrak{A}$" non è definibile da alcun insieme di enunciati al prim'ordine. *Suggerimento*: si utilizzi il teorema di Löwenheim-Skolem all'insù.

Esercizio 1.11. Stabilire in quali dei seguenti casi il termine $f(a, u)$ (a simbolo di costante, u variabile, f simbolo di funzione ternario) è sostituibile per x in φ, e scrivere $\varphi[f(a, u)/x]$. (P, R, S sono simboli di predicati)

(a) $f(x, x) = a$.
(b) $\exists x(f(x, x) = x)$.
(c) $P(x) \wedge \exists x R(x, y)$.
(d) $\exists u(S(x, y, u))$.
(e) $\exists x \exists u(f(x, u) = f(u, x))$.
(f) $S(x, y, u)$.

Per ciascuna delle seguenti formule stabilire se è in forma normale prenessa, quali sono le variabili libere, se è un enunciato.

(a) $\exists x(A(x, y) \wedge B(x))$.
(b) $\exists x(\exists y(A(x, y) \to B(x)))$.
(c) $(\neg \exists x(\exists y A(x, y))) \to B(x)$.
(d) $(\exists x A(x, y)) \wedge B(x)$.
(e) $\forall x(\neg \exists y A(x, y))$.
(f) $\exists x A(x, x) \wedge \exists y B(y)$.

Esercizio 1.12. Si trovi un insieme coerente di enunicati in un certo linguaggio del prim'ordine che non facciano uso del simbolo di uguaglianza e tale che ogni modello abbia cardinalità almeno 2.

Esercizio 1.13. Esiste un'assiomatizzazione al prim'ordine della classe dei gruppi numerabili?

Esercizio 1.14. Esibire un linguaggio al prim'ordine e un insieme Γ di enunciati che abbia esattamente un modello infinito numerabile (a meno di isomofismi).

Bozza di soluzione. Prendo come linguaggio il linguaggio vuoto. Non impongo alcun assioma. Isomorfismo tra modelli vuol dire biezione.

Soluzione alternativa: $\mathbb{Q}$ è l'unico insieme totalmente ordinato numerabile denso senza massimo e minimo. (Cantor's isomorphism theorem.)

Soluzione alternativa: l'algebra di Boole libera su numerabili generatori è l'unica algebra di Boole numerabile senza atomi.

2. Conseguenza logica

Esercizio 2.1. Si consideri un linguaggio con un solo simbolo, R, di predicato e di arietà 2. Si trovi un insieme finito di enunciati in tale linguaggio che abbia un modello infinito ma che non abbia alcun modello finito.

Esercizio 2.2. Sia Γ l'insieme di formule

- $\forall x \exists y R(x, y)$.

- $\forall x \forall y(R(x,y) \to \neg R(y,x))$.
- $\forall x \forall y \forall z(R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z))$.

Trovare un modello di Γ. Esiste un modello finito?

Esercizio 2.3. Si consideri un linguaggio con un simbolo di costante 0 e un simbolo di funzione 1-ario s.

(a) Si trovi un insieme finito Γ di enunciati al prim'ordine in tale linguaggio che abbia un modello infinito ma che non abbia alcun modello finito. Si trovino due modelli di Γ non isomorfi.

(b) Esiste un insieme (possibilmente infinito) di enunciati al prim'ordine che abbia come unico modello (a meno di isomorfismi) l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali con l'elemento 0 e la funzione successore s?

Esercizio 2.4. Si consideri un linguaggio $\mathcal{L}$ del prim'ordine con un simbolo di predicato binario M. Sia $\mathfrak{A}_0$ la struttura per $\mathcal{L}$ con insieme soggiacente $A_0 = \{3, 5\}$ in cui $M(x, y) =$ "$x \leq y$" . Siano u e w variabili e sia ν_0 una interpretazione delle variabili in A_0 tale che $\nu_0(u) = 3$, $\nu_0(w) = 5$. Per ciascuna formula φ tra le seguenti, si stabilisca

(i) se $\mathfrak{A}_0, \nu_0 \models \varphi$.
(ii) se $\mathfrak{A}_0 \models \varphi$.
(iii) se $\models \varphi$.
(iv) se φ è soddisfacibile.

Le formule da considerare (con variabili libere contenute in $\{a, b\}$), sono:

(a) $\forall x(M(u,x) \to M(x,w))$.
(b) $\exists x \forall y M(x,y)$.
(c) $\forall x M(u,x)$.
(d) $\forall x M(w,x)$.
(e) $\exists x M(u,x)$.
(f) $\forall x \forall y(M(x,y) \to \neg M(y,x))$.
(g) $\neg(M(u,w) \leftrightarrow M(w,u))$.
(h) $\forall x(M(w,x) \vee M(x,u))$.
(i) $\forall x \exists y M(x,y)$.
(j) $\exists x M(w,x)$.
(k) $\forall x \exists y M(y,x)$.

Bozza di soluzione. (a). $\mathfrak{A}_0, \nu_0 \models \varphi$ perché la consequente in φ è sempre vera. $\mathfrak{A}_0 \not\models \varphi$; si consideri $\nu(u) = 5$ e $\nu(w) = 5$; si valuti in $x = 5$. $\not\models \varphi$ perché $\mathfrak{A}_0, \nu_0 \models \varphi$.

(b). $\mathfrak{A}_0, \nu_0 \models \varphi$: si valuti $x = 3$. $\mathfrak{A}_0 \models \varphi$: si valuti $x = 3$. $\not\models \varphi$: $A = \{*\}$ e $M^A = \varnothing$.

Esercizio 2.5. Mostrare che le seguenti formule sono soddisfacibili e non logicamente valide.

(a) $(\forall x \exists y R(x,y)) \to \exists y R(y,y)$.
(b) $P(u) \vee \neg P(v)$.
(c) $\forall x(R(x,u) \vee \neg R(u,x))$.
(d) $(\exists x \exists y R(x,y)) \to \exists y R(y,y)$.
(e) $\exists x(R(u,x) \vee \neg R(v,x))$.
(f) $\exists x(R(a,x) \vee R(b,x))$.
(g) $(\exists x P(x) \leftrightarrow \exists x Q(x)) \to (\exists x(P(x) \leftrightarrow Q(x)))$.

(h) $(\exists x(P(x) \to Q(x))) \to ((\exists x P(x)) \to (\exists x Q(x)))$.

Bozza di soluzione. (a). Soddisfacibile: $A = \{*\}$, $R = \{(*, *)\}$.
Non logicamente valido: Sia $A = \{a, b\}$, e $R^A = \{(a, b), (b, a)\}$.
(b). Soddisfacibile: $A = \{*\}$. $P = \{*\}$.
Non logicamente valido: Sia $A = \{a, b\}$. $P = \{b\}$. $\nu(u) = a$, $\nu(v) = b$.
(c).
Non logicamente valido: $A = \{a, b\}$. $R^A = \{(a, b)\}$. $\nu(u) = a$. Per vedere che è falsa, si prenda $x = b$.

Esercizio 2.6. Si esibisca un insieme non soddisfacibile di enunciati soddisfacibili.

Esercizio 2.7. Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio del prim'ordine, e siano φ e ψ formule in tale linguaggio. Dimostra che la condizione (i) qui sotto implica la (ii), ma in generale non vale il viceversa.

(i) Per ogni struttura $\mathfrak{A}$, se $\mathfrak{A} \models \varphi$ allora $\mathfrak{A} \models \psi$.
(ii) Se $\models \varphi$ allora $\models \psi$.

Esercizio 2.8. Per ognuna dei seguenti enunciati, mostrare che è soddisfacibile ma non logicamente valido.

(a) $\forall x \exists y R(x, y) \wedge \neg \forall x P(x)$.
(b) $\forall x \exists y R(x, y) \wedge \forall x \neg R(x, x)$.
(c) $\forall x P(x) \vee \forall x \neg P(x)$.
(d) $P(c) \to \neg P(c)$.
(e) $\forall x \exists y R(x, y) \to \exists y \forall x R(x, y)$.
(f) $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \to \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$.
(g) $((\exists x P(x)) \to P(c)) \wedge \neg P(c)$.
(h) $P(c) \to P(a)$.

Bozza di soluzione. (a). $A = \{*\}$. $R^A = \{(*, *)\}$. $P^A = \varnothing$.
(b). Soddisfacibile: $A = \mathbb{N}$. $R^A = <$. Non logicamente valido: $A = \{*\}$. $R^A = \varnothing$.

Esercizio 2.9. Siano φ e ψ le formule $\forall x(R(a, x) \wedge \exists y R(x, y))$ e $\forall x R(x, x)$ rispettivamente. Mostrare che $\varphi \not\models \psi$ e $\psi \not\models \varphi$.

Esercizio 2.10. Nelle seguenti domande si consideri come linguaggio il linguaggio dei gruppi.

(a) $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}) = \mathrm{Th}(\mathbb{Z})$? (Consideriamo $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z}$ come gruppi additivi.)
(b) $S_{\mathbb{N}} \in \mathrm{ModTh}(\{\text{gruppi ciclici}\})$? ($S_{\mathbb{N}}$ è il gruppo di permutazioni su $\mathbb{N}$.)
(c) Esiste un gruppo G tale che $\mathrm{Th}(G) = \mathrm{Th}(\{\text{gruppi}\})$?
(d) (Questo è un po' più tecnico di teoria dei gruppi) $\mathbb{Z} \in \mathrm{Th}(\{\text{ gruppi ciclici finiti }\})$?
(e) (Questo è un po' più tecnico di teoria dei gruppi) $\mathrm{Th}(\{\text{gruppi abeliani finiti}\}) = \mathrm{Th}(\{\text{gruppi ciclici finiti}\})$?

Bozza di soluzione. (a) No. Si consideri $\forall x \exists y(x = y^2)$.
(b) No. $S_{\mathbb{N}}$ non è abeliano, cioè non soddisfa $\forall x \forall y(xy = yx)$.
(c) No. Per qualsiasi gruppo G, uno dei seguenti due enunciati sta in $\mathrm{Th}(G)$:
   (a) $\forall x \forall y(x = y)$.
   (b) $\neg(\forall x \forall y(x = y))$.
   Però nessuno dei due enunciati sta in $\mathrm{Th}(\{\text{gruppi}\}$. (In altre parole: Per ogni gruppo G, $\mathrm{Th}(G)$ è completa, ma $\mathrm{Th}(\{\text{gruppi}\}$ non è completa.)

Esercizio 2.11. Si consideri il linguaggio vuoto. Mostrare che

$$\mathrm{Th}(\{\text{strutture finite}\}) = \mathrm{Th}(\{\text{strutture}\}).$$

(Una struttura per il linguaggio vuoto è semplicemente un insieme.)

Esercizio 2.12. La teoria dei gruppi è un'estensione conservativa della teoria dei monoidi?

Esercizio 2.13. Fornire un esempio di teoria non Henkin.

Esercizio 2.14. Moatrare che, per i gruppi, la proprietà di essere ciclico non è esprimibile al prim'ordine.

Bozza di soluzione. Löwenheim-Skolem.

3. Forme normali prenesse

Ricorda: una formula φ è in *forma normale prenessa* se tutti i quantificatori in φ (se ce ne sono) appaiono all'inizio della formula, in altre parole se è della forma

$$\spadesuit_1 x_1 \dots \spadesuit_n x_n (\psi)$$

dove, per $i \in \{1, \dots, n\}$, $\spadesuit_i \in \{\forall, \exists\}$, e ψ non ha quantificatori.

Esercizio 3.1. Riscrivere le seguenti formule in forma normale prenessa.

(a) $(\neg \exists z Q(x, y, z)) \vee (\forall z \exists w P(w, x, y, z))$.
(b) $(\forall x P(x)) \to Q(y)$.
(c) $\exists x (P(x) \wedge \exists x\, Q(x))$.
(d) $P(x, y) \wedge \forall x\, Q(x)$.
(e) $\exists x \Big(P(x) \wedge \forall y \left(Q(x) \wedge \exists x\, R(x, y) \right) \Big)$.
(f) $\exists z (S(y, z) \wedge \exists y (S(z, y) \wedge \forall z (S(x, z) \wedge S(z, y))))$.
(g) $(\forall x (R(x) \to P(x, y))) \to ((\exists y R(x)) \to (\exists z P(y, z)))$.
(h) $(\exists x R(x, y)) \to (P(x) \to \neg(R(x, u)))$.
(i) $(\forall z (R(x, z) \wedge R(x, y))) \to \exists w (R(x, w) \wedge R(y, w) \wedge R(z, w))$.

4. Deduzione naturale al prim'ordine

Esercizio 4.1. Utilizzando le regole della deduzione naturale, produrre derivazioni per i seguenti fatti (le lettere x, y, z sono variabili, le lettere a, b, c sono costanti):

(a) $\vdash \ \forall x \neg (F(x) \wedge \neg F(x))$.
(b) $R(a), \forall x (R(x) \to S(x)) \vdash \exists x S(x)$.
(c) $\exists x R(x), \forall x (R(x) \to S(x)) \vdash \exists x S(x)$.
(d) $\forall x R(x) \vdash \forall y R(y)$.
(e) $\exists x R(x) \vdash \exists y R(y)$.
(f) $\neg \exists x \neg R(x) \vdash \forall x R(x)$.
(g) $\neg \forall x R(x) \vdash \exists x \neg R(x)$.
(h) $\exists x \neg R(x) \vdash \neg \forall x R(x)$.
(i) $\exists x \exists y R(x, y) \vdash \exists y \exists x R(x, y)$.
(j) $\forall x (F(x) \to G(a)) \vdash (\exists x F(x)) \to G(a)$.
(k) $\vdash \exists x (R(x) \to \forall y R(y))$ (in ["Logic and Structure", van Dalen], è scritto che è istruttivo pensare a $R(x)$ come "x beve").
(l) $(\exists x F(x)) \to G(a) \vdash \forall x (F(x) \to G(a))$.
(m) $\exists x (P \to R(x)) \vdash P \to \exists x R(x)$.

(n) $\exists x\forall y A(x,y) \vdash \forall y\exists x A(x,y)$.
(o) $\vdash \exists x\exists y(R(x,y)\to R(y,x))$.
(p) $\forall x(F(x)\vee\neg F(x))$.
(q) $\forall x F(x)\wedge\forall x G(x) \ \vdash\ \forall x(F(x)\wedge G(x))$.
(r) $\forall x\exists y\forall z R(x,y,z) \ \vdash\ \forall x\forall z\exists y R(x,y,z)$.
(s) $\forall x\forall y R(x,y)\vdash\forall x(R(x,x)\wedge\forall y R(y,x))$.
(t) $\forall x\forall y R(x,y)\vdash\forall x\forall y(R(x,y)\wedge R(y,x))$.
(u) $\exists x P(x)\vee\exists y Q(y)\vdash\exists z(P(z)\vee Q(z))$.
(v) $\forall x(\exists y P(y)\to Q(x))\vdash\forall x\exists y(P(y)\to Q(x))$.
(w) $\forall x\neg\forall y(P(x,y)\to Q(x,y))\vdash\forall x\exists y P(x,y)$.
(x) $\neg\forall x\neg\forall y R(y,x)\vdash\forall x\neg\forall y\neg R(x,y)$.
(y) $\forall x(F(x)\to G(x)),\forall x F(x)\vdash\exists x G(x)$.
(z) $\forall x(F(x)\to\neg G(x)),\exists x G(x)\vdash\exists x\neg F(x)$.

Bozza di soluzione. (a).

$$\mathrm{I}\forall\,\dfrac{\mathrm{I}\neg_1\,\dfrac{\mathrm{E}\neg\,\dfrac{\mathrm{E}\wedge\,\dfrac{[F(x)\wedge\neg F(x)]^1}{F(x)} \qquad \mathrm{E}\wedge\,\dfrac{[F(x)\wedge\neg F(x)]^1}{\neg F(x)}}{\bot}}{\neg(F(x)\wedge\neg F(x))}}{\forall x\neg(F(x)\wedge\neg F(x))}$$

(b)

$$\mathrm{I}\exists\,\dfrac{\mathrm{E}{\to}\,\dfrac{\mathrm{E}\forall\,\dfrac{\forall x(R(x)\to S(x))}{R(a)\to S(a)} \qquad R(a)}{S(a)}}{\exists x S(x)}$$

(c)

$$\mathrm{E}\exists_1\,\dfrac{\exists x R(x) \qquad \mathrm{E}{\to}\,\dfrac{[R(x)]^1 \qquad \mathrm{E}\forall\,\dfrac{\forall x(R(x)\to S(x))}{R(x)\to S(x)}}{S(x)}}{\exists x S(x)}$$

(d)

$$\mathrm{I}\forall\,\dfrac{\mathrm{E}\forall\,\dfrac{\forall x R(x)}{R(y)}}{\forall y R(y)}$$

(e)

$$\mathrm{E}\exists_1\,\dfrac{\exists x R(x) \qquad \mathrm{I}\exists\,\dfrac{[R(x)]^1}{\exists y(R(y))}}{\exists y R(y)}$$

(f)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg R(x)]^1$}
\LeftLabel{I$\exists$}
\UnaryInfC{$\exists x \neg R(x)$}
\AxiomC{$\neg \exists x \neg R(x)$}
\LeftLabel{E$\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\UnaryInfC{$R(x)$}
\LeftLabel{I$\forall_1$}
\UnaryInfC{$\forall x R(x)$}
\end{prooftree}
$$

(g)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg \exists \neg R(x)]^1$}
\AxiomC{$[\neg R(x)]^2$}
\LeftLabel{E$\exists$}
\UnaryInfC{$\exists x \neg R(x)$}
\LeftLabel{E$\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\LeftLabel{RA$_2$}
\UnaryInfC{$R(x)$}
\LeftLabel{I$\forall$}
\UnaryInfC{$\forall x R(x)$}
\AxiomC{$\neg \forall x R(x)$}
\LeftLabel{E$\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\LeftLabel{RA$_1$}
\UnaryInfC{$\exists x \neg R(x)$}
\end{prooftree}
$$

(h)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\exists x \neg R(x)$}
\AxiomC{$\neg R(x)$}
\AxiomC{$[\forall x R(x)]^1$}
\LeftLabel{E$\forall$}
\UnaryInfC{$R(x)$}
\LeftLabel{E$\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\LeftLabel{E$\exists$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\LeftLabel{I$\neg_1$}
\UnaryInfC{$\neg \forall x R(x)$}
\end{prooftree}
$$

(i)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\exists x \exists y R(x,y)$}
\AxiomC{$[\exists y R(x,y)]_1$}
\AxiomC{$[R(x,y)]^2$}
\LeftLabel{I$\exists$}
\UnaryInfC{$\exists x R(x,y)$}
\LeftLabel{I$\exists$}
\UnaryInfC{$\exists y \exists x R(x,y)$}
\LeftLabel{E$\exists$}
\BinaryInfC{$\exists y \exists x R(x,y)$}
\LeftLabel{E$\exists_2 1$}
\BinaryInfC{$\exists y \exists x R(x,y)$}
\end{prooftree}
$$

(j)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\exists x F(x)]^1$}
\AxiomC{$[F(x)]^2$}
\AxiomC{$\forall x (F(x) \to G(a))$}
\UnaryInfC{$F(x) \to G(a)$}
\BinaryInfC{$G(a)$}
\BinaryInfC{$G(a)$}
\LeftLabel{I$\to$}
\UnaryInfC{$(\exists x F(x)) \to G(a)$}
\end{prooftree}
$$

Esercizio 4.2. É vero che $R(x) \vdash \forall x R(x)$?

Esercizio 4.3. Una variante del paradosso di Russell può essere esposta così:

Ogni barbiere rade esattamente quelli che non si radono da sé. Perciò non ci sono barbieri.

Semplifichiamola a

Nessuno rade esattamente chi non si rade da sè.

Si formalizzi quest'ultimo enunciato al prim'ordine e lo si dimostri con la derivazione naturale. (Utilizza un simbolo di predicato binario R per esprimere "x rade y" come $R(x, y)$.) (Interpretando $R(x, y)$ come $x \ni y$ nella struttura i cui elementi sono gli insiemi (trascurando problemi di grossezza), l'affermazione si può riformulare come "Non esiste l'insieme degli insiemi che non si appartengono".)

Esercizio 4.4. Si dimostri con la deduzione naturale che, nel detto "chi ha i denti non ha il pane, e chi ha il pane non ha i denti", si sta dicendo due volte la stessa cosa, cioè le seguenti affermazioni sono logicamente equivalenti:

(a) $\forall x(D(x) \to \neg P(x))$ (chi ha i denti non ha il pane).
(b) $\forall x(P(x) \to \neg D(x))$ (chi ha ha il pane non ha i denti).

5. Applicazioni della compattezza

Esercizio 5.1. Mostra che le seguenti classi <u>non</u> sono assiomatizzabili al prim'ordine:

(a) gruppi finiti;
(b) gruppi di torsione (cioè $\forall x \; \exists n \in \mathbb{N} : x^n = 1$);
(c) grafi connessi.

Nota che in (b) e (c) si utilizzano delle formule con variabili libere.

Bozza di soluzione. (a). Per il lemma 4.75 ("Se un insieme di enunciati Γ ha modelli finit di cardinalità arbitraria, allora Γ ha un modello infinito.) Supponiamo per assurdo che la classe dei gruppi finiti sia assomatizzabile al primo'ordine.

Allora esiste un insieme di formule chiuse T tale che i modelli di T sono esattamente i gruppi finiti.

Consideriamo le seguenti formule.

$$\varphi_2 \coloneqq \exists x_1 \exists x_2 : x_1 \neq x_2$$
$$\varphi_3 \coloneqq \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 : x_1 \neq x_2, x_1 \neq x_3, x_2 \neq x_3$$
$$\vdots$$
$$\varphi_n \coloneqq \exists x_1, \dots, \exists x_n : \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j$$
$$\vdots$$

Sia $T' = T \cup \{\varphi_2, \varphi_3, \dots\}$.

T' è finitamente soddisfacibile (considero il modello $\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$ per n appropriato.) Per il teorema di compattezza, poichè abbiamo supposto che T è una teoria al prim'ordine, T' è soddisfacibile. Ma ciò è assurdo, perchè un modello di T' dev'essere per forza sia finito (perché contiene T) che infinito (poiché contiene $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots\}$).

(b). Consideriamo le seguenti formule (con x variabile libera).

$$\varphi_1 \coloneqq x \neq 1;$$
$$\varphi_2 \coloneqq x^2 \neq 1;$$
$$\varphi_3 \coloneqq x^3 \neq 1$$
$$\vdots$$

Supponiamo per assurdo che esiste un'assiomatizzazione T al prim'ordine dei gruppi di torsione.

Poniamo $T' \coloneqq T \cup \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots\}$.

T' è finitamente soddisfacibile (si consideri $\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$). Perciò, per il teorema di compattezza, è soddisfacibile. (cioè esiste una struttura ed un'interpretazione ν tale che...)

(c). $\varphi_n \coloneqq$ la distanza da x a y è almeno n (cioè non esistono cammini da x a y di lunghezza meno di n). Ovvero:

$$\neg(\exists x_1 \dots \exists_{n-2}(\bigwedge_{1 \le i < j \le n} x_i \neq x_j) \wedge R(x, x_1) \wedge R(x_1, x_2) \wedge \dots \wedge R(x_{n-3}, x_{n-2}) \wedge R(x_{n-2}, y)).$$

Supponiamo per assurdo... (si procede come prima)

Note: per dimostrare la non assiomatizzabilità al prim'ordine di una certa properietà P, si utilizza spesso il teorema di compattezza; si scrive "non P" come una congiunzione di infiniti assiomi $\{\varphi_i\}_i$ al prim'ordine tali che ogni sottoinsieme finito di $\{\varphi_i\}_i$ non contraddice P (ma la loro congiunzione sì)...

Esercizio 5.2. Mostrare che la classe dei gruppi privi di torsione non è finitamente assiomatizzabile.

Bozza di soluzione. Per $n \geq 1$, sia $\varphi_n \coloneqq \forall x((x \neq 1) \to (x^n \neq 1))$. Sia $\Sigma \coloneqq \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$. Sia $S \subseteq \Sigma$ finito, e mostriamo che $\mathrm{Mod}(S) \neq \mathrm{Mod}(\Sigma)$. Esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $S \subseteq \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$.

Sia p primo, $p > n$. $C_p \in \mathrm{Mod}S \setminus \mathrm{Mod}(\Sigma)$.

Per Lemma 4.78, $\mathrm{Mod}\Sigma$ non è finitamente assiomatizzabile.

Esercizio 5.3. Mostrare che la classe dei grafi aciclici non è finitamente assiomatizzabile.

Bozza di soluzione. Per $n \geq 1$, sia $\varphi_n \coloneqq$ "non esiste alcun ciclo lungo n". Sia $\Sigma \coloneqq \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$. Sia $S \subseteq \Sigma$ finito, e mostriamo che $\mathrm{Mod}(S) \neq \mathrm{Mod}(\Sigma)$. Esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $S \subseteq \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Sia D un ciclo lungo $n+1$. $D \in \mathrm{Mod}S \setminus \mathrm{Mod}(\Sigma)$.

Per Lemma 4.78, $\mathrm{Mod}\Sigma$ non è finitamente assiomatizzabile.

Esercizio 5.4. Siano K_1 e K_2 teorie in uno stesso linguaggio $\mathcal{L}$. Si assuma che ogni struttura M per $\mathcal{L}$ sia un modello di K_1 sse non è un modello di K_2. Si mostri che K_1 e K_2 sono finitamente assiomatizzabili.

6. Ultraprodotti

Esercizio 6.1. Esiste un'ultrapotenza infinita di un'insieme di due elementi?

Esercizio 6.2. Sia A un insieme finito. Sia I un insieme e $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su I. Mostrare che l'immersione canonica

$$A \to \prod_{i \in I} A/\mathcal{U}$$

è biiettiva.

Esercizio 6.3. Mostrare che, data una struttura finita A, ogni ultrapotenza di A è isomorfa ad A.

Esercizio 6.4. Mostrare che la classe degli insiemi ben ordinati non è assiomatizzabili al prim'ordine. (Insieme ben ordinato $:=$ insieme totalmente ordinato ogni sottoinsieme non vuoto del quale ha minimo.)

Bozza di soluzione. Considera un'ultraprotenza $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}/\mathcal{F}$, con $\mathcal{F}$ che estende i cofiniti e considera la successione di elementi

$$a_j = [(\underbrace{0, \dots, 0}_{j \text{ volte}}, 1, 2, 3, 4, \dots)].$$