TUTORATO LOGICA MATEMATICA
A.A. 2022/2023

ESERCIZI 2022.10.06

Ho inserito delle bozze di soluzione: non sono soluzioni complete, ma solo degli accenni. (C'è qualche esercizio in più rispetto a quelli svolti in classe.) I riferimenti presenti si riferiscono alle dispense del corso.

Esercizio 0.1. Stabilire quali tra le seguenti proposizioni sono tautologie, quali sono contraddizioni, quali sono soddisfacibili. (Si vedano Def. 2.35, 2.37.)

(1) $(p \to q) \vee (q \to p)$.
(2) $(p \vee q) \to (\neg p \wedge r)$.
(3) $(p \leftrightarrow p) \to (q \leftrightarrow \neg q)$.
(4) $p \to \neg p$.
(5) $\neg(p \to p)$.
(6) $p \leftrightarrow \neg p$.
(7) $p \to (q \vee p)$.
(8) $p \wedge q \wedge r$.
(9) $p \vee q \vee r$.
(10) $\bot \to p$.
(11) $p \to q$.
(12) $p \to p$.
(13) $(\neg p \to p) \to p$.
(14) $\neg\neg p \to p$.
(15) $p \to \neg\neg p$.
(16) $(\neg p \vee \neg q) \to (p \to \neg q)$.
(17) $(p \wedge q) \to (p \to q)$.
(18) $(p \vee q) \to (p \to q)$.

Soluzione. (1) $(p \to q) \vee (q \to p)$ è una tautologia, è soddisfacibile, non è una contraddizione.
(2) $(p \vee q) \to (\neg p \wedge r)$ è soddisfacibile, non è una tautologia, non è una contraddizione. Per verificare che è soddisfacibile basta refutare le ipotesi (oppure soddisfare le conclusioni) dell'implicazione.
(3) $(p \leftrightarrow p) \to (q \leftrightarrow \neg q)$ è insoddisfacibile, è una contraddizione, non è una tautologia. Infatti, $(p \leftrightarrow p) \to (q \leftrightarrow \neg q) \equiv \top \to \bot \equiv \bot$.

Date: 8 ottobre 2022.

(4) $p \to \neg p$ è soddisfacibile (si prenda la valutazione $p \to 0$), non è una tautologia (si prenda la valutazione $p \to 1$), non è una contraddizione (poichè è soddisfatta dalla valutazione $p \to 0$).
(5) $\neg(p \to p)$ non è soddisfacibile, non è una tautologia, è una contraddizione.
(6) $p \leftrightarrow \neg p$ non è soddisfacibile, non è una tautologia, è una contraddizione.
(7) $p \to (q \vee p)$ è soddisfacibile, è una tatutologia, non è una contraddizione.
(8) $p \wedge q \wedge r$ è soddisfacibile, non è una tautologia, non è una contraddizione.
(9) $p \vee q \vee r$ è soddisfacibile, non è una tautologia, non è una contraddizione.
(10) $\perp \to p$ è soddisfacibile, è una tautologia, non è una contraddizione.
(11) $p \to q$ è soddisfacibile, non è una tautologia, non è una contraddizione.
(12) $p \to p$ è tautologia, soddisfacibile, non contraddizione.
(13) $(\neg p \to p) \to p$ è tautologia, soddisfacibile, non contraddizione.
(14) $\neg\neg p \to p$ è tautologia, soddisfacibile, non contraddizione.
(15) $p \to \neg\neg p$ è tautologia, soddisfacibile, non contraddizione.

□

Esercizio 0.2. Stabilire quali dei seguenti insiemi di formule è soddisfacibile, nel senso che c'è una valutazione delle lettere proposizionali che rende tutte le formule vere. (Si veda Def. 2.33.)

(1) $\Gamma = \{\ p \to q, \quad q \to r, \quad r \to \neg p\ \}$.
(2) $\Gamma = \{\ p \to q, \quad (p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)\ \}$.
(3) $\Gamma = \{\ p \vee \neg q, \quad \neg(q \wedge p), \quad q\ \}$.
(4) $\Gamma = \{\ p_0 \to q_0, \quad p_0 \wedge p_1 \to q_0 \vee q_1, \quad p_0 \wedge p_1 \wedge p_2 \to q_0 \vee q_1 \vee q_2, \quad \ldots\ \}$.
(5) $\Gamma = \{\ p \leftrightarrow q, \quad p \to \neg q, \quad \neg p \to q\ \}$.
(6) $\Gamma = \{\ p \to q, \neg q\ \}$.
(7) $\Gamma = \{\ \neg(\neg q \vee p), \quad p \vee \neg r, \quad q \to \neg r\ \}$.
(8) $\Gamma = \{\ (\neg p \wedge q) \to r, \quad p \to (\neg p \to q), \quad p \leftrightarrow \neg q\ \}$.

Soluzione. Per gli insiemi finiti, un metodo di risoluzione che funziona sempre è fare le tavole di verità. Però questo metodo potrebbe essere molto lungo. Quando possibile, utilizzeremo delle scorciatoie.

(1) Soddisfacibile.
Ad esempio, valutando p, q e r come false, tutti gli elementi di Γ sono resi veri, perché sono implicazioni con antecedente falsa. (Ci sono altre valutazioni che rendono vere Γ, ad esempio $p \mapsto 0$, $q \mapsto 1$, $r \mapsto 1$.)
(2) Insoddisfacibile.
L'elemento $(p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)$ di Γ è della forma "$\varphi \vee \neg\varphi$", e quindi è falso per qualsiasi valutazione di p e q.
In alternativa: affinché $(p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)$ sia vero, è necessario che $\neg(p \vee q)$ sia vero, cioè che $p \vee q$ sia falso, cioè che sia p che q siano false. Quindi l'unica valutazione che ha una chance di soddisfare Γ è $p \mapsto 0$, $q \mapsto 0$. Ma uno osserva che la valutazione $p \mapsto 0$, $q \mapsto 0$ rende falso $p \vee q$ e perciò anche

$(p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)$, cioè il secondo elemento dell'insieme. Perciò, l'insieme di formule è insoddisfacibile.

(3) Insoddisfacibile.
Affinché Γ sia soddisfatta, q deve essere vera; ma in questo caso $\neg q$ è falsa, e perciò, affinché $p \vee \neg q$ sia vera, p deve essere vera. In fatti, la valutazione $p \mapsto 1$, $q \mapsto 0$ rende vere tutte le formule di Γ; ma allora $\neg(q \wedge p)$ è falsa.

(4) Soddisfacibile.
Ad esempio: ponendo ogni p_i falsa e le q_i a piacere. Oppure: ponendo ogni q_i vera e le p_i a piacere.

(5) Insoddisfacibile. L'ultimo elemento di Γ è equivalente a $\neg q \to p$. Messa assieme al secondo elemento, si ottiene $p \leftrightarrow \neg q$. Messa assieme al primo elemento, si deduce $q \leftrightarrow \neg q$, che non può essere soddisfatto.

(6) L'insieme $\{p \to q, \neg q\}$ è soddisfacibile: si consideri la valutazione $p \mapsto 0$, $q \mapsto 0$.

$\square$

Esercizio 0.3. Si dimostri o confuti la seguente affermazione: per ogni insieme Γ di formule proposizionali, Γ è soddisfacibile se e solo se ogni formula di Γ è soddisfacibile.

Soluzione. Falso. Controesempio: $\Gamma = \{p, \neg p\}$. $\square$

Esercizio 0.4. Usando le tavole di verità, stabilire se le seguenti conseguenze logiche sono corrette. (Si veda Def. 2.16.)

(1) $(p \wedge \neg q) \to \perp \vDash p \to q$. [1] [2]
(2) $\{p \to q, \neg q\} \vDash \neg p$.
(3) $p \wedge q \vDash p \vee q$.
(4) $\{p \to q, q \to r\} \vDash p \to r$. [3]
(5) $p \vee q \vDash p \wedge q$.
(6) $p \to \neg p \vDash \neg p$.
(7) $\vDash p$.
(8) $p \to q \wedge r \vDash (p \to q) \to r$.
(9) $p \vee (\neg q \wedge r) \vDash (q \vee \neg r) \to p$.
(10) $p \to (q \to r) \vDash (p \to q) \to r$.
(11) $(p \to q) \to r \vDash p \to (q \to r)$.

Soluzione. (1) La consequenza logica $(p \wedge \neg q) \to \perp \vDash p \to q$ è corretta.

[1] Per convenzione, questo significa $\{(p \wedge \neg q) \to \perp\} \vDash p \to q$: le graffe vengono soppresse perché l'insieme è un singoletto.

[2] Questo è il ragionamento per assurdo.

[3] Questa è la transitività dell'implica.

(2) La consequenza logica $\{p \to q, \neg q\} \vDash \neg p$ è corretta poiché, in ogni riga in cui sia $p \to q$ che $\neg q$ sono valutati 1, la proposizione $\neg p$ è valutata 1.

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

(3) La consequenza logica è corretta poiché, in ogni riga in cui $p \wedge q$ è valutata 1, $p \vee q$ è valutata 1.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

(4) La conseguenza logica è corretta.
(5) La consequenza logica non è corretta poichè, quando ad esempio p è valutata 0 e q è valutata 1, $p \vee q$ è valutata 0 e $p \wedge q$ è valutata 1.
(6) La consequenza logica è corretta.

p	$p \to \neg p$	$\neg p$
0	1	1
1	0	0

(7) La consequenza logica non è corretta, come testimoniato dalla valutazione $p \mapsto 0$.

□

Esercizio 0.5. Stabilire se le seguenti coppie di formule proposizionali sono logicamente equivalenti. (Si veda Def. 2.17.)

(1) $p \to q$ e $\neg q \to \neg p$. [4]
(2) $p \to \neg d$ e $d \to \neg p$. [5]
(3) $(p \to q) \to r$ e $p \to (q \to r)$.
(4) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$ e $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$.
(5) $p \to q$ e $q \to p$.
(6) $(p \to q) \wedge \neg p$ e $\neg p$.
(7) $p \to \neg p$ e $\neg p$.
(8) $\neg(p \wedge q)$ e $\neg p \vee \neg q$.
(9) $\neg(p \vee q)$ e $\neg p \wedge \neg q$.
(10) $p \leftrightarrow q$ e $(p \to q) \wedge (q \to p)$.

[4] L'implicazione $\neg q \to \neg p$ è chiamata la contronominale $p \to q$.

[5] Queste due proposizioni sono ispirate al detto "chi ha il pane non ha i denti ($d \to \neg p$), chi ha i denti non ha il pane ($p \to \neg d$)", che è composta da due proposizioni logicamente equivalenti, rendendo il detto ridondante (anche se potrebbe non sembrare).

(11) $\neg p \vee q$ e $\neg q \vee p$.
(12) $\neg(p \leftrightarrow q)$ e $p \leftrightarrow \neg q$.
(13) $p \vee (q \leftrightarrow r)$ e $(p \vee q) \leftrightarrow (p \vee r)$.
(14) $p \to (q \leftrightarrow r)$ e $(p \to q) \leftrightarrow (p \to r)$.
(15) $p \wedge (q \leftrightarrow r)$ e $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge r)$.
(16) $p \to q$ e $\neg p \vee q$.
(17) $p \to q$ e $\neg(p \wedge \neg q)$.

Soluzione. (1) $p \to q$ e $\neg q \to \neg p$ sono logicamente equivalenti (ogni implicazione è equivalente alla sua contronominale).

(2) $p \to \neg d$ e $d \to \neg p$ sono logicamente equivalenti, poichè hanno le stesse tavole di verità. In alternativa, si può ragionare così: dato che ogni implicazione è equivalente alla sua contronominale, $p \to \neg d$ è equivalente a $\neg\neg d \to \neg p$, che equivalente $d \to \neg p$ perchè ogni formula è equivalente alla sua doppia negazione.

(3) $(p \to q) \to r$ e $p \to (q \to r)$ non sono logicamente equivalenti, come testimoniato ad aesempio dalla valutazione $p \mapsto 0$, $q \mapsto 1$, $r \mapsto 0$, che rende falsa la prima implicazione e vera la seconda. Questo significa che l'implica non è associativo.

(4) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$ e $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$ sono logicamente equivalenti. Ciò vuol dire che il se e solo se è associativo.

(5) $p \to q$ e $q \to p$ non sono logicamente equivalenti. Ad esempio, la valutazione $p \mapsto 0$, $q \mapsto 1$ rende vera la prima formula, ma falsa la seconda.

(6) $p \to \neg p$ e $\neg p$ sono logicamente equivalenti. Si può osservare dalle tavole di verità. Oppure, si può notare che $(p \to q) \wedge \neg p$ è equivalente a $(\neg p \vee q) \wedge \neg p$, che è equivalente a $\neg p$ per la legge di Assorbimento 2 (Esempio 2.32).

(7) $p \to \neg p$ e $\neg p$ sono logicamente equivalenti.

(8) Logicamente equivalenti. È una delle due leggi di De Morgan.

(9) Logicamente equivalenti. È l'altra delle due leggi di De Morgan.

$\square$

Ricorda che una formula proposizionale φ è detta in *forma normale*... (Si veda Def. 2.21.)

- ... *disgiuntiva* se $\varphi = \psi_1 \vee \cdots \vee \psi_k$, dove ciascun ψ_i è una congiunzione di variabili proposizionali e negazioni di variabili proposizionali.
- ... *congiuntiva* se $\varphi = \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_k$, dove ciascun ψ_i è una disgiunzione di variabili proposizionali e negazioni di variabili proposizionali.

Esercizio 0.6. Per ognuna delle seguenti formule proposizionali, scriverne una equivalente in forma normale disgiuntiva e una equivalente in forma normale congiuntiva (alcune sono già scritte in forma normale disgiuntiva/congiuntiva). (Si veda Def. 2.21.)

(1) $p \wedge (q \vee r)$.

(2) $\neg p \leftrightarrow q$.
(3) $(p \vee q) \to r$.
(4) $p \vee q$.
(5) $p \wedge q$.
(6) $p \wedge (p \to q)$.
(7) $((p \vee q) \wedge r) \vee s$.
(8) $(p \to q) \wedge (q \to p)$.
(9) $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$.
(10) $\neg(p \to q) \vee (\neg p \wedge r)$.
(11) $p \leftrightarrow ((q \wedge \neg p) \vee r)$.
(12) $(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$.
(13) $\neg p \vee (q \to \neg r)$.
(14) $(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge r)$.
(15) $(p \vee q) \leftrightarrow \neg r$.
(16) $\neg(p \leftrightarrow q)$.
(17) $((p \to q) \to q) \to q$.
(18) $(p \to (p \wedge \neg q)) \wedge (q \to (q \wedge \neg p))$.

Soluzione. La soluzione si può trovare con l'utilizzo delle tavole di verità oppure utilizzando alcuni schemi di tautologie (in particolare le leggi di de Morgan, le leggi distributive, la legge della doppia negazione, si veda Esempio 2.32). Ricordo che la forma normale disgiuntiva (così come quella congiuntiva) non è unica: diverse formule in forma normale disgiuntiva possono avere la stessa forma.

(1) FNC: $p \wedge (q \vee r)$ è già in forma normale congiuntiva.

FND: Troviamo ora la forma normale disgiuntiva. Utilizzando le tavole di verità, come in Esempio 2.23.

p	q	r	$(q \vee r)$	$p \wedge (q \vee r)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Quindi otteniamo la forma normale disgiuntiva: $(p \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$.

Soluzione alternativa: utilizzando la legge di distributività (si veda Esempio 2.32): $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

(2) FND:

$\neg p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \to q) \wedge (q \to \neg p) \equiv (\neg\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p) \equiv (p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \equiv (p \wedge \neg q) \vee \bot \vee \bot \vee (q \wedge \neg p) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$.

Oppure posso ragionare così: un "se e solo se" è vero se e solo se entrambi i lati sono veri oppure entrambi i lati sono falsi. Perciò, $\neg p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \wedge q) \vee (\neg\neg p \wedge \neg q) = (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$.

Oppure utilizziamo le tavole di verità.

p	q	$\neg p \leftrightarrow q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Otteniamo $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$.

FNC:

$\neg p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \to q) \wedge (q \to \neg p) \equiv (\neg\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p) \equiv (p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)$.

Oppure si può ottenere dalla tavola di verità.

(3) $(p \vee q) \to r \equiv \neg(p \vee q) \vee r \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r$.

(4) È già sia in forma normale disgiuntiva che in forma normale congiuntiva.

(5) È già sia in forma normale disgiuntiva che in forma normale congiuntiva.

(6) FND: $p \wedge (p \to q) \equiv p \wedge (\neg p \vee q) \equiv (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \equiv \bot \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge q$.

Vale anche come forma normale congiuntiva.

□