TUTORATO LOGICA MATEMATICA
A.A. 2022/2023

ESERCIZI 2022.10.13

Ho inserito delle bozze di soluzione: non sono soluzioni complete, ma solo degli accenni.

Esercizio 1. Per ognuna delle seguenti formule proposizionali, scriverne una equivalente in forma normale disgiuntiva (alcune sono già scritte in forma normale disgiuntiva). (Si veda Def. 2.21.)

(1) $p \wedge (q \vee r)$.
(2) $\neg p \leftrightarrow q$.
(3) $(p \vee q) \rightarrow r$.
(4) $\neg(\neg p \vee (q \rightarrow r))$.
(5) $p \vee q$.
(6) $p \wedge q$.
(7) $p \wedge (p \rightarrow q)$.
(8) $((p \vee q) \wedge r) \vee s$.
(9) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.
(10) $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$.
(11) $\neg(p \rightarrow q) \vee (\neg p \wedge r)$.
(12) $p \leftrightarrow ((q \wedge \neg p) \vee r)$.
(13) $(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$.
(14) $\neg p \vee (q \rightarrow \neg r)$.
(15) $(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge r)$.
(16) $(p \vee q) \leftrightarrow \neg r$.
(17) $\neg(p \leftrightarrow q)$.
(18) $((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow q$.
(19) $(p \rightarrow (p \wedge \neg q)) \wedge (q \rightarrow (q \wedge \neg p))$.

Soluzione. La soluzione si può trovare con l'utilizzo delle tavole di verità oppure utilizzando alcuni schemi di tautologie (in particolare le leggi di de Morgan, le leggi distributive, la legge della doppia negazione, si veda Esempio 2.32). Ricordo che la forma normale disgiuntiva (così come quella congiuntiva) non è unica: diverse formule in forma normale disgiuntiva possono avere la stessa forma.

(1). FNC: $p \wedge (q \vee r)$ è già in forma normale congiuntiva.

Date: 14 ottobre 2022.

FND: Troviamo ora la forma normale disgiuntiva. Utilizzando le tavole di verità, come in Esempio 2.23.

p	q	r	$(q \vee r)$	$p \wedge (q \vee r)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Quindi otteniamo la forma normale disgiuntiva: $(p \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$.

Soluzione alternativa: utilizzando la legge di distributività (si veda Esempio 2.32): $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

(2). FND:

$\neg p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \to q) \wedge (q \to \neg p) \equiv (\neg\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p) \equiv (p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \equiv (p \wedge \neg q) \vee \bot \vee \bot \vee (q \wedge \neg p) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$.

Oppure posso ragionare così: un “se e solo se” è vero se e solo se entrambi i lati sono veri oppure entrambi i lati sono falsi. Perciò, $\neg p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \wedge q) \vee (\neg\neg p \wedge \neg q) = (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$.

Oppure utilizziamo le tavole di verità.

p	q	$\neg p \leftrightarrow q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Otteniamo $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$.

FNC:

$\neg p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \to q) \wedge (q \to \neg p) \equiv (\neg\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p) \equiv (p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)$.

Oppure si può ottenere dalla tavola di verità.

(3). $(p \vee q) \to r \equiv \neg(p \vee q) \vee r \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r$. (FND.)

FNC: $(\neg p \wedge \neg q) \vee r \equiv (\neg p \vee r) \wedge (q \vee r)$.

Oppure, con la tavola di verità.

p	q	r	$(p \lor q) \to r$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

FND: $(\neg p \land \neg q \land \neg r) \lor (\neg p \land \neg q \land r) \lor (\neg p \land q \land r) \lor (p \land \neg q \land r) \lor (p \land q \land r)$.

FNC: $(p \lor \neg q \lor r) \land (\neg p \lor q \lor r) \land (\neg p \lor \neg q \lor r)$.

(4). Tavola di verità.

p	q	r	$\neg(\neg p \lor (q \to r))$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

FND: $(\neg p \land q \land r) \lor (p \land \neg q \land \neg r) \lor (p \land \neg q \land r) \lor (p \land q \land \neg r) \lor (p \land q \land r)$.

FNC: $(p \lor q \lor r) \land (p \lor q \lor \neg r) \land (p \lor \neg q \lor \neg r)$.

Oppure, usando le varie leggi per evitare la tavola di verità.

$\neg(\neg p \land (q \to r)) \equiv \neg\neg p \lor \neg(q \to r) \equiv p \lor \neg(\neg q \lor r) \equiv p \lor (\neg\neg q \land \neg r) \equiv p \lor (q \land \neg r)$. (FND.)

FNC: $p \lor (q \land \neg r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor \neg r)$.

(5). È già sia in forma normale disgiuntiva che in forma normale congiuntiva.

(6). È già sia in forma normale disgiuntiva che in forma normale congiuntiva.

(7). FND: $p \land (p \to q) \equiv p \land (\neg p \lor q) \equiv (p \land \neg p) \lor (p \land q) \equiv \bot \lor (p \land q) \equiv p \land q$.

Vale anche come forma normale congiuntiva. □

Esercizio 2.
(1) Si verifichi che, se $\varphi \to \psi$ è una tautologia e gli insiemi di variabili in φ e ψ sono disgiunti, allora φ è insoddisfacibile oppure ψ è una tautologia.
(2) Si può rimuovere dall'affermazione precedente l'ipotesi che richiede che gli insiemi di variabili in φ e ψ siano disgiunti?

Soluzione. (1) Basta dimostrare che se gli insiemi di variabili in φ e ψ sono disgiunti, se φ è soddisfacibile e ψ non è una tautologia, allora $\varphi \to \psi$ non è una tautologia. Supponiamo quindi che gli insiemi di variabili in φ e ψ sono disgiunti, che φ è soddisfacibile e che ψ non è una tautologia. Allora esiste una valutazione ν delle variabili di φ che rende φ vera, e una valutazione μ delle variabili di ψ che rende ψ falsa. Dato che gli insiemi di variabili in φ e ψ sono disgiunti, possiamo combinare ν e μ ottenendo una valutazione delle variabili che appartengono a φ o ψ che rende vera φ e falsa ψ, e che quindi rende falsa $\varphi \to \psi$. Questo mostra che $\varphi \to \psi$ non è una tautologia.

(2) No. Controesempio: $p \to p$.

□

Esercizio 3. È facile vedere che ogni insieme parzialmente ordinato su un insieme finito può essere esteso a un ordine totale. Si utilizzi il teorema di compattezza per mostrare che questo risultato è vero anche per insiemi infiniti.

Soluzione. Sia P un insieme parzialmente ordinato. Prendiamo come insieme di variabili proposizionali l'insieme $P \times P$. Per evitare confusione, denotiamo un elemento (a, b) di $P \times P$ pensato come variabile proposizionale con $\varphi_{a,b}$. Poniamo

$$\begin{aligned} T \coloneqq &\{\varphi_{a,b} \mid a, b \in P, a \leq b\} \cup \\ &\cup \{\varphi_{a,b} \vee \varphi_{b,a} \mid a, b \in P\} \cup \\ &\cup \{(\varphi_{a,b} \wedge \varphi_{b,c}) \to \varphi_{a,c} \mid a, b, c \in P\} \cup \\ &\cup \{\neg\varphi_{a,b} \vee \neg\varphi_{a,b} \mid a, b \in P,\ a \neq b\}. \end{aligned}$$

L'idea è che un modello di T codifica un insieme parzialmente ordinato che estende P. Infatti, dato un modello di $\nu\colon P \times P \to \{0, 1\}$ di T (dimostreremo che esiste), otteniamo un insieme parzialmente ordinato Q che estende P ponendo $a \leq b$ se e solo se $\nu(\varphi_{a,b}) = 1$. La prima riga nella definizione di T codifica che Q estende P, la seconda codifica che Q è totale, la terza che Q è transitivo, la quarta che Q è antisimmetrico.

Poichè ogni insieme parzialmento ordinato su un insieme finito può essere esteso a un ordine totale, T è finitamente soddisfacibile. Per il teorema di compattezza, T è soddisfacibile, cioè ha un modello, cioè esiste un insieme parzialmente ordinato Q che estende P ponendo $a \leq b$ se e solo se $\nu(\varphi_{a,b}) = 1$. □

1. Deduzione naturale proposizionale

Per ottenere una deduzione naturale, un metodo che solitamente funziona è provare a dimostrare in modo informale ciò che bisogna dimostrare, e poi formalizzarlo. Quindi bisogna partire dalla domanda: "Se volessi dimostrare questo fatto, cosa farei?". Solitamente le difficoltà sono date dall'utilizzo del ragionamento per assurdo.

Esercizio 4. Utilizzando le regole della deduzione naturale, produrre derivazioni per i seguenti fatti: (Si veda la Tabella 2 a pag. 30)

(1) $\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi)$.
Soluzione:

$$\mathrm{I}{\to}_1\,\dfrac{\mathrm{I}{\to}_2\,\dfrac{[\varphi]^1}{\psi\to\varphi}}{\varphi\to(\psi\to\varphi)}$$

(L'assunzione $[\psi]^2$ non è scritta perché non viene usata.)

(2) $\varphi\to\psi\vdash\neg\psi\to\neg\varphi$.

Soluzione:

$$\mathrm{I}{\to}_1\,\dfrac{\mathrm{I}\neg_2\,\dfrac{\mathrm{E}\neg\,\dfrac{\mathrm{E}{\to}\,\dfrac{\varphi\to\psi\qquad[\varphi]^2}{\psi}\qquad[\neg\psi]^1}{\bot}}{\neg\varphi}}{\neg\psi\to\neg\varphi}$$

(3) $\neg\psi\to\neg\varphi\vdash\varphi\to\psi$.

Soluzione:

$$\mathrm{I}{\to}_1\,\dfrac{\mathrm{RA}_2\,\dfrac{\mathrm{E}\neg\,\dfrac{\mathrm{E}{\to}\,\dfrac{\neg\psi\to\neg\varphi\qquad[\neg\psi]^2}{\neg\varphi}\qquad[\varphi]^1}{\bot}}{\psi}}{\varphi\to\psi}$$

(4) $\vdash\neg\neg\varphi\leftrightarrow\varphi$.

Soluzione:

$$\mathrm{I}{\leftrightarrow}_1\,\dfrac{\mathrm{RA}_2\,\dfrac{\mathrm{E}\neg\,\dfrac{[\neg\neg\varphi]^1\qquad[\neg\varphi]^2}{\bot}}{\varphi}\qquad\mathrm{I}\neg_3\,\dfrac{\mathrm{E}\neg\,\dfrac{[\varphi]^1\qquad[\neg\varphi]^3}{\bot}}{\neg\neg\varphi}}{\neg\neg\varphi\leftrightarrow\varphi}$$

(5) $\varphi\wedge\psi\vdash\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)$.

Soluzione:

$$\mathrm{I}\neg_1\,\dfrac{\mathrm{E}{\vee}_2\,\dfrac{[\neg\varphi\vee\neg\psi]^1\qquad\mathrm{E}\neg\,\dfrac{[\neg\varphi]^2\qquad\mathrm{E}{\wedge}_{Sx}\,\dfrac{\varphi\wedge\psi}{\varphi}}{\bot}\qquad\mathrm{E}\neg\,\dfrac{[\neg\psi]^2\qquad\mathrm{E}{\wedge}_{Dx}\,\dfrac{\varphi\wedge\psi}{\psi}}{\bot}}{\bot}}{\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)}$$

(6) $\vdash\varphi\vee\neg\varphi$.

Soluzione:

$$\mathrm{RA}_1\,\dfrac{\mathrm{E}\neg\,\dfrac{\mathrm{RA}_2\,\dfrac{\mathrm{E}\neg\,\dfrac{\mathrm{I}{\vee}\,\dfrac{[\neg\varphi]^2}{\varphi\vee\neg\varphi}\qquad[\neg(\varphi\vee\neg\varphi)]^1}{\bot}}{\varphi}\qquad\mathrm{I}\neg_3\,\dfrac{\mathrm{E}\neg\,\dfrac{\mathrm{I}{\vee}\,\dfrac{[\varphi]^3}{\varphi\vee\neg\varphi}\qquad[\neg(\varphi\vee\neg\varphi)]^1}{\bot}}{\neg\varphi}}{\bot}}{\varphi\vee\neg\varphi}$$

(7) $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi \vee \psi$.
Soluzione:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\varphi \wedge \psi$}
\LeftLabel{E$\wedge$}
\UnaryInfC{φ}
\LeftLabel{I$\vee$}
\UnaryInfC{$\varphi \vee \psi$}
\end{prooftree}
$$

(8) $\varphi \vee \psi \vdash \psi \vee \varphi$.
Soluzione:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\varphi \vee \psi$}
\AxiomC{$[\varphi]^2$}
\LeftLabel{I$\vee$}
\UnaryInfC{$\psi \vee \varphi$}
\AxiomC{$[\neg(\psi \vee \varphi)]^1$}
\LeftLabel{E$\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\AxiomC{$[\psi]^2$}
\LeftLabel{I$\vee$}
\UnaryInfC{$\psi \vee \varphi$}
\AxiomC{$[\neg(\psi \vee \varphi)]^1$}
\LeftLabel{E$\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\LeftLabel{E$\vee_2$}
\TrinaryInfC{$\bot$}
\LeftLabel{RA$_1$}
\UnaryInfC{$\psi \vee \varphi$}
\end{prooftree}
$$

(9) $\varphi \vee \psi, \psi \to \sigma \vdash \varphi \vee \sigma$.
Soluzione:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\varphi \vee \psi$}
\AxiomC{$[\varphi]^2$}
\LeftLabel{I$\vee$}
\UnaryInfC{$\varphi \vee \sigma$}
\AxiomC{$[\neg(\varphi \vee \sigma)]$}
\LeftLabel{E$\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\AxiomC{$[\psi]^2$}
\AxiomC{$\psi \to \sigma$}
\LeftLabel{E$\to$}
\BinaryInfC{σ}
\LeftLabel{I$\vee$}
\UnaryInfC{$\varphi \vee \sigma$}
\AxiomC{$[\neg(\varphi \vee \sigma)]$}
\LeftLabel{E$\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\LeftLabel{E$\vee_2$}
\TrinaryInfC{$\bot$}
\LeftLabel{RA$_1$}
\UnaryInfC{$\varphi \vee \sigma$}
\end{prooftree}
$$

(10) $\varphi \to (\psi \to \chi) \vdash (\varphi \wedge \psi \to \chi)$.
(11) $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma))$.
(12) $(\varphi \to (\psi \to \sigma)) \vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma)$.
(13) $\vdash (\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$.
(14) $\varphi \to (\psi \to \sigma), \varphi, \neg\sigma \vdash \neg\psi$.
(15) $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \vdash (\varphi \vee \psi) \to (\varphi \wedge \psi)$.
(16) $(\varphi \vee \psi) \to (\varphi \wedge \psi) \vdash (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$.
(17) $\neg\varphi \wedge \neg\psi \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$.
(18) $(\psi \to \sigma) \wedge (\psi \vee \varphi) \vdash (\varphi \to \psi) \to (\sigma \wedge \psi)$.
(19) $\varphi \to \psi, \varphi \wedge \neg\psi \vdash \sigma$.
(20) $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \wedge \sigma) \to (\psi \wedge \sigma))$.
(21) $\varphi \to (\psi \wedge \sigma) \vdash (\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \sigma)$.
(22) $\varphi \to (\varphi \to \psi), \varphi \vdash \psi$.
(23) $\varphi \to (\psi \to \sigma) \vdash \psi \to (\varphi \to \sigma)$.
(24) $\neg\varphi \vee \psi \vdash \varphi \to \psi$.
(25) $\bot \vdash \varphi$.
(26) $\varphi \vdash \neg\varphi \to \psi$.

(Segnalo dove si usa il ragionamento per assurdo negli esercizi sopra: in (3), nell'implicazione $\to$ di (4), in (6), in (25) (btw, in alcuni testi $\bot \vdash \varphi$ viene presa come regola di eliminazione di $\perp$ (in analogia alla regola di eliminazione di $\vee$)), in (26) (per dedurre ψ da $\perp$), in (9) (per dedurre ψ da $\perp$), in (19) (per dedurre r da $\perp$), in (24) (per dedurre q da $\perp$).)

Qualche indovinello

Segnalo alcuni indovinelli collegati alla logica proposizionale. Provare a risolverli non è un modo efficiente per prepararsi all'esame, quindi date più importanza agi altri esercizi. Però è più divertente.

L'ultimo di questi indovinelli (Esercizio 8) ha ricevuto il titolo di "indovinello più difficile del mondo" (almeno secondo Wikipedia). Gli indovinelli precedenti sono utili per risolverlo.

Esercizio 5. Un certo stato è abitato solamente da veritieri (= persone che dicono sempre la verità) e bugiardi (= persone che mentono sempre). Inoltre, le persone rispondono solo a domande *con risposta sì o no*. Un turista arriva a un bivio in cui una strada porta alla capitale e l'altra no. Non c'è alcuna indicazione su quale strada prendere, ma c'è un nativo al bivio. Quale domanda alla quale rispondere con sì o no potrebbe fare il turista per determinare quale strada prendere?

Suggerimento: Sia

$$P \coloneqq \text{"Sei un veritiero."}$$

e sia

$$Q \coloneqq \text{"Il bivio di sinistra porta alla capitale."}.$$

Costruire, con l'aiuto di un'opportuna tavola di verità, una formula proposizionale φ con lettere proposizionali P e Q tale per cui la risposta del nativo alla domanda "φ?" sia "sì" se e solo se Q è vera.

Esercizio 6. Un turista si reca in uno stato i cui abitanti parlano una lingua in cui le parole "sì" e "no" si dicono "ja" e "da", ma il turista non sa quale di questi termini corrisponda a "sì" e quale a "no". Nonostante i nativi capiscano la lingua del turista, essi parlano sempre nella propria lingua. Il turista arriva a un bivio in cui una strada porta alla capitale e l'altra no. Non c'è alcuna indicazione su quale strada prendere, ma c'è un nativo al bivio. Quale domanda alla quale rispondere con sì o no potrebbe fare il turista per determinare quale strada prendere?

Suggerimento: Sia

$$R \coloneqq \text{"Il termine "ja" della vostra lingua corrisponde al termine "sì" nella mia lingua."}$$

e sia

$$S \coloneqq \text{"Il bivio di sinistra porta alla capitale."}.$$

Costruire, con l'aiuto di un'opportuna tavola di verità, una formula proposizionale ψ con lettere proposizionali R e S tale per cui la risposta del nativo alla domanda "ψ?" sia "ja" se e solo se S è vera.

Esercizio 7. In un certo stato ci sono due tipi di persone: veritieri (che dicono sempre la verità), e imprevedibili (che rispondono il vero o il falso in modo casuale). Un turista si trova a un bivio in cui una strada porta alla capitale e l'altra no. Al bivio ci sono tre nativi: il turista sa che uno si chiama Valerio, uno Marco e uno Ivo, e che Valerio e Marco sono veritieri, mentre Ivo è imprevedibile, ma non sa chi sia chi. Come può il turista, ponendo tre domande dalla risposta "sì o no", stabilire il nome di ciascuno?

(Non è necessario porre le domande a persone diverse. Si può decidere una domanda e l'interlocutore a seconda delle risposte avute in precedenza.)

Esercizio 8. (L'indovinello più difficile del mondo secondo Wikipedia (`https://it.wikipedia.org/wiki/L%27indovinello_pi%C3%B9_difficile_del_mondo`).) Tre oracoli divini A, B, e C sono chiamati, in un qualche ordine, Verace, Mendace e Imprevedibile. Verace dice sempre il vero, Mendace dice sempre il falso, mentre Imprevedibile decide se essere sincero o meno in modo completamente casuale. L'obiettivo del gioco è determinare le identità di A, B, e C ponendo loro tre domande a cui è possibile rispondere con un "sì" o con un "no". Ogni domanda deve essere posta a uno solo degli oracoli, che, pur comprendendo l'italiano, risponderà sempre nella propria lingua con le parole "da" o "ja". Non si sa quale di questi termini corrisponda a "sì" e quale a "no".

Suggerimento: la soluzione è la stessa di Esercizio 7, ma ciascuna domanda va modificata come negli Esercizi 5 e 6.