TUTORATO LOGICA MATEMATICA
A.A. 2022/2023

ESERCIZI 2022.10.20

Per ottenere una deduzione naturale, un metodo che solitamente funziona è provare a dimostrare in modo informale ciò che bisogna dimostrare, e poi formalizzarlo. Quindi bisogna partire dalla domanda: "Se volessi dimostrare questo fatto, cosa farei?". Solitamente le difficoltà sono date dall'utilizzo del ragionamento per assurdo.

Esercizio 1. Utilizzando le regole della deduzione naturale, produrre derivazioni per i seguenti fatti: (Si veda la Tabella 2 a pag. 30)

(1) $\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi)$.
Soluzione:

$$\mathrm{I}{\to}_1\,\dfrac{\mathrm{I}{\to}_2\,\dfrac{[\varphi]^1}{\psi \to \varphi}}{\varphi \to (\psi \to \varphi)}$$

(L'assunzione $[\psi]^2$ non è scritta perché non viene usata.)

(2) $\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$.
Soluzione:

$$\mathrm{I}{\to}_1\,\dfrac{\mathrm{I}\neg_2\,\dfrac{\mathrm{E}\neg\,\dfrac{\mathrm{E}{\to}\,\dfrac{\varphi \to \psi \qquad [\varphi]^2}{\psi} \qquad [\neg\psi]^1}{\bot}}{\neg\varphi}}{\neg\psi \to \neg\varphi}$$

(3) $\neg\psi \to \neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$.
Soluzione:

$$\mathrm{I}{\to}_1\,\dfrac{\mathrm{RA}_2\,\dfrac{\mathrm{E}\neg\,\dfrac{\mathrm{E}{\to}\,\dfrac{\neg\psi \to \neg\varphi \qquad [\neg\psi]^2}{\neg\varphi} \qquad [\varphi]^1}{\bot}}{\psi}}{\varphi \to \psi}$$

(4) $\vdash \neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$.
Soluzione:

$$\mathrm{I}{\leftrightarrow}_1\,\dfrac{\mathrm{RA}_2\,\dfrac{\mathrm{E}\neg\,\dfrac{[\neg\neg\varphi]^1 \qquad [\neg\varphi]^2}{\bot}}{\varphi} \qquad \mathrm{I}\neg_3\,\dfrac{\mathrm{E}\neg\,\dfrac{[\varphi]^1 \qquad [\neg\varphi]^3}{\bot}}{\neg\neg\varphi}}{\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi}$$

Date: 20 ottobre 2022.

(5) $\varphi \land \psi \vdash \varphi \lor \psi$.
Soluzione:

$$\mathrm{I}\lor\ \dfrac{\mathrm{E}\land\ \dfrac{\varphi \land \psi}{\varphi}}{\varphi \lor \psi}$$

(6) $\varphi \land \psi \vdash \neg(\neg\varphi \lor \neg\psi)$.
Soluzione:

$$\mathrm{I}\neg_1\ \dfrac{\mathrm{E}\lor_2\ \dfrac{[\neg\varphi \lor \neg\psi]^1 \qquad \mathrm{E}\neg\ \dfrac{[\neg\varphi]^2 \qquad \mathrm{E}\land_{Sx}\ \dfrac{\varphi \land \psi}{\varphi}}{\bot} \qquad \mathrm{E}\neg\ \dfrac{[\neg\psi]^2 \qquad \mathrm{E}\land_{Dx}\ \dfrac{\varphi \land \psi}{\psi}}{\bot}}{\bot}}{\neg(\neg\varphi \lor \neg\psi)}$$

(7) $\vdash \varphi \lor \neg\varphi$.
Soluzione:

$$\mathrm{RA}_1\ \dfrac{\mathrm{E}\neg\ \dfrac{\mathrm{RA}_2\ \dfrac{\mathrm{E}\neg\ \dfrac{\mathrm{I}\lor\ \dfrac{[\neg\varphi]^2}{\varphi \lor \neg\varphi} \qquad [\neg(\varphi \lor \neg\varphi)]^1}{\bot}}{\varphi} \qquad \mathrm{I}\neg_3\ \dfrac{\mathrm{E}\neg\ \dfrac{\mathrm{I}\lor\ \dfrac{[\varphi]^3}{\varphi \lor \neg\varphi} \qquad [\neg(\varphi \lor \neg\varphi)]^1}{\bot}}{\neg\varphi}}{\bot}}{\varphi \lor \neg\varphi}$$

(8) $\varphi \lor \psi \vdash \psi \lor \varphi$.
Soluzione:

$$\mathrm{E}\lor_2\ \dfrac{\varphi \lor \psi \qquad \mathrm{I}\lor\ \dfrac{[\varphi]^2}{\psi \lor \varphi} \qquad \mathrm{I}\lor\ \dfrac{[\psi]^2}{\psi \lor \varphi}}{\psi \lor \varphi}$$

(9) $\varphi \lor \psi, \psi \to \sigma \vdash \varphi \lor \sigma$.
Soluzione:

$$\mathrm{E}\lor_2\ \dfrac{\varphi \lor \psi \qquad \mathrm{I}\lor\ \dfrac{[\varphi]^2}{\varphi \lor \sigma} \qquad \mathrm{I}\lor\ \dfrac{\mathrm{E}\to\ \dfrac{[\psi]^2 \qquad \psi \to \sigma}{\sigma}}{\varphi \lor \sigma}}{\varphi \lor \sigma}$$

(10) $\varphi \to (\psi \to \chi) \vdash (\varphi \land \psi \to \chi)$.
(11) $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma))$.
(12) $(\varphi \to (\psi \to \sigma)) \vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma)$.
(13) $\vdash (\neg\varphi \lor \psi) \to (\varphi \to \psi)$.
(14) $\varphi \to (\psi \to \sigma), \varphi, \neg\sigma \vdash \neg\psi$.
(15) $(\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi) \vdash (\varphi \lor \psi) \to (\varphi \land \psi)$.
(16) $(\varphi \lor \psi) \to (\varphi \land \psi) \vdash (\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi)$.
(17) $\neg\varphi \land \neg\psi \vdash \neg(\varphi \lor \psi)$.
(18) $(\psi \to \sigma) \land (\psi \lor \varphi) \vdash (\varphi \to \psi) \to (\sigma \land \psi)$.

(19) $\varphi \to \psi, \varphi \wedge \neg\psi \vdash \sigma$.
(20) $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \wedge \sigma) \to (\psi \wedge \sigma))$.
(21) $\varphi \to (\psi \wedge \sigma) \vdash (\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \sigma)$.
(22) $\varphi \to (\varphi \to \psi), \varphi \vdash \psi$.
(23) $\varphi \to (\psi \to \sigma) \vdash \psi \to (\varphi \to \sigma)$.
(24) $\neg\varphi \vee \psi \vdash \varphi \to \psi$.
(25) $\bot \vdash \varphi$.
(26) $\varphi \vdash \neg\varphi \to \psi$.

Esercizio 2. Si stabilisca se i seguenti insiemi di formule proposizionali sono coerenti.

(1) $\{p, \neg(p \vee q)\}$.
(2) $\{p \to q, \neg q\}$.

Soluzione. Ricordiamo che Γ è coerente se e solo se $\Gamma \nvdash \bot$. Per il Lemma 2.67, Γ è coerente se e solo se Γ è soddisfacibile, cioè (Def. 2.33) esiste una valutazione ν tale che per ogni $\gamma \in \Gamma$ si ha $\nu(\gamma) = 1$.

(1) No, perché

$$\mathrm{E}\neg\,\dfrac{\mathrm{I}\vee\,\dfrac{p}{p \vee q} \qquad \neg(p \vee q)}{\bot}$$

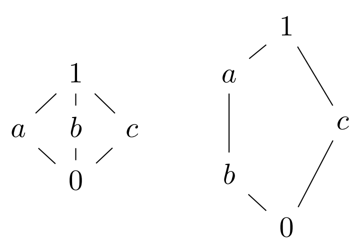
(2) Sì, perché c'è un modello: $q \mapsto 0$, $q \mapsto 0$.

□

1. Esercizi su algebre di Boole

Esercizio 3. (1) Trovare un esempio di insieme parzialmente ordinato che non è un reticolo.
(2) Trovare un esempio di reticolo non limitato.
(3) Trovare un esempio di reticolo distributivo limitato non complementato.
(4) Trovare un esempio di reticolo limitato complementato non distributivo.

Soluzione. (1) Un insieme di due elementi inconfrontabili.
(2) $\mathbb{Z}$.
(3) Una catena di tre elementi.
(4) I seguenti sono due esempi.



Non vale $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

□

Esercizio 4.

(1) Esiste un'algebra di Boole di 16 elementi?
(2) È vero che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste un'algebra di Boole di cardinalità n?
(3) Esiste un'algebra di Boole di cardinalità del continuo?

(4) Esiste un'algebra di Boole di cardinalità numerabile?
(5) Si mostri che, per ogni cardinale infinito κ, esiste un'algebra di Boole di cardinalità κ.

Soluzione. (1) Sì. L'insieme delle parti di un insieme di quattro elementi.
(2) No. Ad esempio, per $n = 0$ oppure per $n = 3$.
(3) Sì. L'insieme delle parti di un insieme di cardinalità numerabile.
(4) Sì. L'algebra dei finiti e cofiniti di un insieme numerabile.
(5) Per ogni cardinale κ, si consideri l'algebra dei finiti e cofiniti di un insieme di cardinalità κ.
Utilizzando strumenti che vedrete più avanti nel corso, ci sono le seguenti soluzioni alternative Soluzione alternativa 1: si consideri l'algebra libera su κ generatori. Soluzione alternativa 2: si provi che esiste un'algebra di Boole numerabile e si applichi il teorema di Löwenheim-Skolem.

$\square$