TUTORATO LOGICA MATEMATICA
A.A. 2022/2023

ESERCIZI 2022.10.27

Esercizio 1.
(1) Esiste un'algebra di Boole di 16 elementi?
(2) È vero che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste un'algebra di Boole di cardinalità n?
(3) Esiste un'algebra di Boole di cardinalità del continuo?
(4) Esiste un'algebra di Boole di cardinalità numerabile?
(5) Si mostri che, per ogni cardinale infinito κ, esiste un'algebra di Boole di cardinalità κ.[1]

Soluzione. (1) Sì. L'insieme delle parti di un insieme di quattro elementi.
(2) No. Ad esempio, per $n = 0$ oppure per $n = 3$.
(3) Sì. L'insieme delle parti di un insieme di cardinalità numerabile.
(4) Sì. L'algebra dei finiti e cofiniti di un insieme numerabile.
(5) Per ogni cardinale κ, si consideri l'algebra dei finiti e cofiniti di un insieme di cardinalità κ. Soluzione alternativa: si consideri l'algebra libera su κ generatori. Soluzione alternativa: si provi che esiste un'algebra di Boole numerabile e si applichi il teorema di Loweneim-Skolem.

□

Esercizio 2. Sia X un insieme, e sia Y un suo sottoinsieme.
(1) Si mostri che la funzione

$$\begin{aligned} \pi \colon \mathcal{P}(X) &\longrightarrow \mathcal{P}(Y) \\ A &\longmapsto A \cap Y \end{aligned}$$

è un omomorfismo suriettivo di algebre di Boole. Inoltre, qual è il kernel di r?
(2) La funzione

$$\begin{aligned} \iota \colon \mathcal{P}(Y) &\longrightarrow \mathcal{P}(X) \\ A &\longmapsto A \end{aligned}$$

è un omomorfismo di algebre di Boole?

Soluzione. (1) È chiaramente suriettivo. Mostriamo che è un omomorfismo. Ad esempio, mostriamo che π preserva $\cap$, 1, $\neg$.

$$\pi(A \cap B) = A \cap B \cap Y = (A \cap Y) \cap (B \cap Y) = \pi(A) \cap \pi(B).$$

$$\pi(X) = X \cap Y = Y$$

$$\pi(X \setminus A) = (X \setminus A) \cap Y = Y \setminus A.$$

Il kernel è $\{A \subseteq X \mid Y \subseteq A\}$.

Date: 28 ottobre 2022.

[1] Ne segue che ogni insieme infinito può essere dotato della struttura di algebra di Boole.

(2) In generale ι non è un omomorfismo, perché se $Y \neq X$ non preserva 1 (e neanche $\neg$). $\square$

Esercizio 3. Siano A e B due algebre di Boole, e sia $f\colon A \to B$ una funzione che preserva $\vee$ e $\neg$. Si mostri che f è un omomorfismo.

Soluzione. Mostriamo che f preserva $\wedge$: $f(x\wedge y) = f(\neg(\neg x\vee\neg y)) = \neg(\neg f(x)\vee\neg f(y)) = f(x)\wedge f(y)$. $\square$

Esercizio 4. Sia $f\colon A \to B$ una funzione tra algebre di Boole che preserva $\vee$, $\wedge$, 0 e 1. Si mostri che f è un omomorfismo.

Soluzione. Dobbiamo mostrare che f preserva $\neg$. Si ricordi che $\neg x$ è l'unico elemento tale che $x\vee\neg x = 1$ e $x \wedge \neg x = 0$. Sia $x \in A$. Per mostrare che $f(\neg x) = \neg f(x)$ basta mostrare che $f(x) \vee f(\neg x) = 1$ e $f(x) \wedge f(\neg x) = 0$. Mostriamolo. Abbiamo $f(x) \vee f(\neg x) = f(x \vee \neg x) = f(1) = 1$ e $f(x) \wedge f(\neg x) = f(x \wedge \neg x) = f(0) = 0$. $\square$

Esercizio 5. Una funzione $f\colon A \to B$ è detta *monotona crescente* se, per ogni $x, y \in A$, $x \leq y$ implica $f(x) \leq f(y)$.

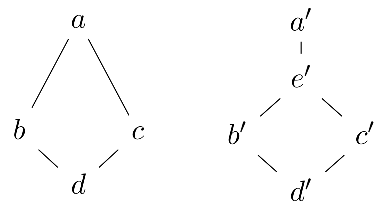
(1) Si stabilisca se la seguente affermazione è vera o falsa:
Se $f\colon A \to B$ è una funzione monotona crescente tra algebre di Boole, allora f è un omomorfismo di algebre di Boole.

(2) Si stabilisca se la seguente frase è vera o falsa:
Se $f\colon A \to B$ è una funzione monotona crescente tra reticoli, allora per ogni $x, y \in A$ si ha $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ e $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.

(3) Si stabilisca se la seguente frase è vera o falsa:
Se $f\colon A \to B$ è una funzione monotona crescente tra algebre di Boole tale che $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$, allora f è un omomorfismo di algebre di Boole.

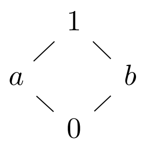
Soluzione. (1) Falsa. Sia A l'algebra di Boole con un solo elemento. Sia B la catena di due elementi $\{0, 1\}$. Si consideri la mappa che manda l'unico elemento di A in 0. Non è un omomorfismo perché non preserva 1.

(2) Falsa. Siano A e B, rispettivamente, i seguenti reticoli.



e sia f la mappa che manda a in a', b in b', c in c' e d in d'.

(3) Falsa. Si prendano sia A che B come la seguente algebra di Boole.



Sia f la mappa che manda 1 in 1, 0 in 0, a in a e b in a. f non è omomorfismo perché $f(a \vee b) = 1 \neq a = a \vee a = f(a) \vee f(b)$. (Questo poteva essere preso come controesempio anche per i due punti precedenti.)

$\square$

Esercizio 6. Dimostra o confuta la seguente affermazione.

> Siano A e B due algebre di Boole, e sia $f\colon A \to B$ un omomorfismo di algebre di Boole. Per ogni $x, y \in A$ si ha $x \leq y$ se e solo se $f(x) \leq f(y)$.

Soluzione. L'affermazione è falsa. Come controesempio, si prenda A come la seguente algebra di Boole.

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ \diagup & & \diagdown \\ a & & b \\ \diagdown & & \diagup \\ & 0 & \end{array}$$

e come B l'algebra di Boole singoletto. Sia $f\colon A \to B$ l'unica funzione da A a B. f è un omomorfismo. $f(1_A) \leq f(0_A)$ ma $1_A \not\leq 0_A$. $\square$

Soluzione. Mostriamo che f preserva $\wedge$: $f(x \wedge y) = f(\neg(\neg x \vee \neg y)) = \neg(\neg f(x) \vee \neg f(y)) = f(x) \wedge f(y)$. Mostriamo che f preserva 0. Abbiamo $0 = f(0) \wedge \neg f(0) = f(0) \wedge f(\neg 0) = f(0) \wedge f(1) = f(0 \wedge 1) = f(0)$. Mostriamo che f preserva 1. Abbiamo $f(1) = f(\neg 0) = \neg f(0) = \neg 0 = 1$. $\square$

Esercizio 7. Mostrare che la funzione inversa di un isomorfismo di algebre di Boole è un isomorfismo di algebre di Boole.

Soluzione. Sia $f\colon A \to B$ un isomorfismo di algebre di Boole, e sia g la funzione inversa. g è biettiva, quindi basta mostrare che è un omomorfismo. Basta mostrare che g preserva $\neg$ e $\vee$.

(1) Mostriamo che g preserva $\neg$. Sia $x \in B$. Poiché f è suriettiva, esiste $x' \in A$ tale che $f(x') = x$. Allora $g(\neg x) = g(\neg f(x')) = g(f(\neg x')) = \neg x'$. Inoltre $\neg g(x) = \neg g(f(x')) = \neg x'$. Perciò $g(\neg x) = \neg g(x)$.
   Modo alternativo: Per mostrare che $g(\neg x) = \neg g(x)$ basta mostrare che $g(\neg x)$ e $\neg g(x)$ hanno la stessa immagine tramite f, poiché f è iniettiva. Mostriamolo. $f(g(\neg x)) = \neg x$, e $f(\neg g(x)) = \neg f(g(x)) = \neg x$.

(2) Mostriamo che g preserva $\vee$. Siano $x, y \in A$. Poiché f è suriettiva, esistono $x', y' \in A$ tali che $f(x') = x$ e $f(y') = y$. Allora $g(x \vee y) = g(f(x') \vee f(y')) = g(f(x' \vee y')) = x' \vee y'$. Inoltre $g(x) \vee g(y) = g(f(x')) \vee g(f(y')) = x' \vee y'$.
   Modo alternativo: Per mostrare che $g(x \vee y)$ e $g(x) \vee g(y)$ sono uguali basta mostrare che hanno la stessa immagine. Mostriamolo. $f(g(x \vee y)) = x \vee y$, e $f(g(x) \vee g(y)) = f(g(x)) \vee f(g(y)) = x \vee y$.

$\square$

Esercizio 8. Siano $f, g\colon A \to B$ omomorfismi suriettivi di algebre di Boole tale che la congruenze $\equiv_f$ e $\equiv_g$ su A (definite da $x \equiv_f x'$ sse $f(x) = f(x')$ e da $x \equiv_g x'$ sse $g(x) = g(x')$, si veda Def. 3.45) coincidono. Segue che f e g sono uguali?

Soluzione. No. Si prendano sia A che B come la seguente algebra di Boole.

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ \diagup & & \diagdown \\ a & & b \\ \diagdown & & \diagup \\ & 0 & \end{array}$$

Si prenda f come l'identità e g come la mappa che manda $\top$ in $\top$, a in b, b in a e $\perp$ in $\perp$. $\square$

Esercizio 9. Dimostrare o confutare la seguente affermazione:
Dati due omomorfismi $f, g\colon A \to B$ di algebre di Boole, la funzione

$$\begin{aligned} h\colon A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x) \vee g(x) \end{aligned}$$

è un omomorfismo di algebre di Boole.

Soluzione. Falso. Si prendano sia A che B come la seguente algebra di Boole.

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & / & & \backslash & \\ a & & & & b \\ & \backslash & & / & \\ & & 0 & & \end{array}$$

Si prenda f come l'identità e g come la mappa che manda $\top$ in $\top$, a in b, b in a e $\bot$ in $\bot$.

La funzione h non preserva $\neg$ (e neanche $\wedge$). Un altro modo di vedere che h non è un omomorfismo è notare che la preimmagine di 0 e la preimmagine di 1 hanno cardinalità diverse. $\square$

Esercizio 10. Se un sottoinsieme B di un'algebra di Boole A contiene 0 e 1 ed è chiuso per $\wedge$ e $\vee$, ne segue che B è una sottalgebra di A?

Soluzione. No. Si consideri l'algebra di Boole di quattro elementi e si prenda un sottoinsieme di tre elementi che contenga 0 e 1. $\square$

Esercizio 11. Sia $n \in \mathbb{N}$, e sia B un'algebra di Boole di n elementi. Quanti filtri ha B? Quante congruenze?

Soluzione. La soluzione è n ad entrambe le domande. Dimostriamolo.

Dimostriamo anzitutto la seguente cosa:

Lemma. *Ogni filtro F in un algebra di Boole B finita è principale, cioè esiste un elemento x tale che $F = \uparrow x$ (dove $\uparrow x$ denota l'insieme $\{y \in B \mid x \leq y\}$).*

Dimostrazione del lemma. Sia F un filtro dell'algebra di Boole finita B. Allora F è finito. Poiché i filtri sono chiusi per inf finiti, anche $\inf F$ appartiene a F, cioè $\inf F$ è il minimo di F. Quindi, $F \subseteq \uparrow (\inf F)$. Poiché i filtri sono chiusi verso l'alto e $\inf F \in F$, abbiamo $\uparrow (\inf F) \subseteq F$. Perciò $F = \uparrow (\inf F)$. $\square$

Concludiamo ora la soluzione dell'esercizio. Sia $\mathrm{Filt}(B)$ l'insieme dei filtri di B. La mappa

$$\begin{aligned} B &\longrightarrow \mathrm{Filt}(B) \\ b &\longmapsto \uparrow b \end{aligned}$$

è ben definita (cioè $\uparrow b$ è un filtro per ogni b), iniettiva (perché l'ordine parziale $\leq$ su B è, per definizione di ordine parziale, antisimmetrico) e suriettiva per il lemma sopra. Perciò $\mathrm{Filt}(B)$ ha la stessa cardinalità di B, cioè n.

Le congruenze sono in biezione con i filtri, perciò sono n anch'esse. $\square$

Esercizio 12. Dimostra o confuta la seguente affermazione.

Per ogni algebra di Boole B, ogni filtro di B è principale.

Soluzione. Falso. Si prenda un insieme X infinito e si consideri l'algebra di Boole $\mathcal{P}(X)$. L'insieme dei sottoinsiemi cofiniti di X è un filtro. Inoltre, non è principale perché non ha minimo: per ogni insieme cofinito A ne esiste uno più piccolo (basta togliere un elemento ad A). $\square$