TUTORATO LOGICA MATEMATICA
A.A. 2022/2023

ESERCIZI 2022.11.10

Esercizio 1. (1) Si mostrino un insieme X e una sottalgebra $\mathcal{A}$ di Boole di $\mathcal{P}(X)$ tale che, per ogni $x \in X$, $\{x\} \notin \mathcal{A}$.
(2) Si mostrino un insieme non vuoto X e una sottalgebra $\mathcal{A}$ di Boole di $\mathcal{P}(X)$ tale che, per ogni $x \in X$, l'ultrafiltro $\{Y \in \mathcal{A} \mid x \in Y\}$ di $\mathcal{A}$ non è principale.

Soluzione. (1) Prima soluzione: $X = \varnothing$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\varnothing)$.
Seconda soluzione: $X = \{a, b\}$, $\mathcal{A} = \{\varnothing, \{a, b\}\}$.
Terza soluzione: Sia $X = \mathbb{Q}$, e $\mathcal{A}$ l'insieme dei sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$ che sono sia chiusi che aperti nella topologia indotta dalla topologia euclidea.
(2) Sia $X = \mathbb{Q}$, e $\mathcal{A}$ l'insieme dei sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$ che sono sia chiusi che aperti nella topologia indotta dalla topologia euclidea.

□

Esercizio 2. Si esibisca un'algebra di Boole con almeno due elementi che non abbia atomi. (Atomo = elemento minimale tra gli elementi non nulli.)

Soluzione. Prima possibilità: l'algebra libera su un insieme infinito.
Soluzione alternativa: l'algebra dei sottoinsiemi aperti e chiusi di $\mathbb{Q}$ con la topologia indotta dalla topologia euclidea. □

Esercizio 3. Sia X un insieme e U un ultrafiltro dell'algebra di Boole $\mathcal{P}(X)$. Si mostri che le seguenti condizioni sono equivalenti.
(1) U è principale.
(2) Esiste un sottoinsieme $Y \subseteq X$ finito che appartiene a U.

Soluzione. (1) $\Rightarrow$ (2). Se U è principale, esiste $x \in X$ tale che $U = \{Y \in \mathcal{P}(X) \mid x \in Y\}$. Si prenda $Y = \{x\}$.
(2) $\Rightarrow$ (1). Sia $Y = \{y_1, \ldots, y_n\} \in U$. Facciamo per semplicità il caso $n = 2$ (il caso n generale si mostra per induzione); quindi $Y = \{y_1, y_2\}$. Abbiamo $\{y_1\} \cup \{y_2\} = \{y_1, y_2\} \in U$; per primalità di U, $y_1 \in U$ oppure $y_2 \in U$. Senza perdità di generalità, assumiamo $y_1 \in U$. Allora il filtro $\mathcal{F}_{y_1}$ generato da y_1 è contenuto in U. Poichè $\mathcal{F}_{y_1}$ e U sono entrambi ultrafiltri, dal fatto che uno è incluso nell'altro deduciamo che sono uguali. Perciò U è principale. □

Esercizio 4. Sia X un insieme e U un ultrafiltro dell'algebra di Boole $\mathcal{P}(X)$. Si mostri che le seguenti condizioni sono equivalenti.
(1) U non è principale.
(2) Ogni sottoinsieme $Y \subseteq X$ cofinito (cioè tale che $X \setminus Y$ è finito) appartiene a U.

Soluzione. In virtù di Esercizio 3, è abbastanza mostrare che (2) è equivalente a

Date: 10 novembre 2022.

(2) Ogni sottoinsieme Y di X finito non appartiene a U.

L'equivalenza tra queste condizioni segue abbastanza immediatamente dal fatto che, poiché U è un ultrafiltro, per ogni sottoinsieme Y di X abbiamo $Y \in U$ oppure $X \setminus Y \in U$, e non possono accadere entrambe le condizioni.

□

Esercizio 5. Sia X un insieme infinito. Si mostri che esiste un ultrafiltro di $\mathcal{P}(X)$ non principale.

Soluzione. Sia F il filtro dei cofiniti. Poiché X è infinito, F è proprio. Per il teorema dell'ultrafiltro (Teorema 3.82), F si estende a un ultrafiltro U. U non è principale perché contiene tutti i cofiniti. □

Esercizio 6. Quali sono gli ultrafiltri dell'algebra di Boole dei finiti-cofiniti di un insieme infinito X?

Soluzione. Sono i filtri principali ($\uparrow \{x\}$, $x \in X$) e il filtro dei cofiniti. □

Esercizio 7. Sia $\mathcal{B}$ l'insieme dei sottoinsiemi A di $X \cup \{\infty\}$ tali che (A è finito e non contiene ∞) oppure (A è cofinito e contiene ∞). Sia Ult l'insieme di ultrafiltri di $\mathcal{B}$. Mostrare che la mappa

$$\begin{aligned} U \colon X \cup \{\infty\} &\longrightarrow \mathrm{Ult} \\ x &\longmapsto \{A \in \mathcal{B} \mid x \in A\} \end{aligned}$$

è biunivoca.

Esercizio 8. Formalizzare al prim'ordine la classe degli ordini parziali.

Esercizio 9. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, esibire un enunciato al primo ordine che esprima il fatto che in una struttura ci sono almeno n elementi.

Esercizio 10. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, esibire un enunciato al primo ordine che esprima il fatto che in una struttura ci sono al massimo n elementi.

Esercizio 11. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, esibire un enunciato al primo ordine che esprima il fatto che in una struttura ci sono esattamente n elementi.

Esercizio 12. Fornire un'assiomatizzazione al prim'ordine (con infiniti assiomi) per ciascuna delle seguenti classi:

(a) gruppi privi di torsione;
(b) grafi aciclici (per grafi intendiamo i grafi direttati, cioè ogni arco ha una direzione; inoltre ammettiamo al più un arco tra due nodi.).

Esercizio 13. Esibire un linguaggio al prim'ordine e un insieme Γ di enunciati che abbia esattamente un modello infinito numerabile (a meno di isomofismi).

Soluzione. Prendo come linguaggio il linguaggio vuoto. Non impongo alcun assioma. Isomorfismo tra modelli vuol dire biezione.

Soluzione alternativa: $\mathbb{Q}$ è l'unico insieme totalmente ordinato numerabile denso senza massimo e minimo. (Cantor's isomorphism theorem.)

Soluzione alternativa: l'algebra di Boole libera su numerabili generatori è l'unica algebra di Boole numerabile senza atomi. □

Esercizio 14. Trovare una teoria al prim'ordine nel linguaggio degli insiemi parzialmente ordinati il cui unico modello numerabile a meno di isomorfismo è $\mathbb{Q}$.

Soluzione. Ordine totale + densità + no massimo + no minimo. □