TUTORATO LOGICA MATEMATICA
A.A. 2022/2023

ESERCIZI 2022.12.01

Esercizio 1. Si consideri un linguaggio $\mathcal{L}$ del prim'ordine con un simbolo di predicato binario M. Sia $\mathfrak{A}_0$ la struttura per $\mathcal{L}$ con insieme soggiacente $A_0 = \{3, 5\}$ in cui $M(x, y) =$ "$x \leq y$" . Siano u e w variabili e sia ν_0 una interpretazione delle variabili in A_0 tale che $\nu_0(u) = 3$, $\nu_0(w) = 5$. Per ciascuna formula φ tra le seguenti, si stabilisca

(i) se $\mathfrak{A}_0, \nu_0 \vDash \varphi$.
(ii) se $\mathfrak{A}_0 \vDash \varphi$.
(iii) se $\vDash \varphi$.
(iv) se φ è soddisfacibile.

Le formule da considerare (con variabili libere contenute in $\{a, b\}$), sono:

(1) $\forall x(M(u, x) \to M(x, w))$.
(2) $\exists x \forall y M(x, y)$.
(3) $\forall x M(u, x)$.
(4) $\forall x M(w, x)$.
(5) $\exists x M(u, x)$.
(6) $\forall x \forall y(M(x, y) \to \neg M(y, x))$.
(7) $\neg(M(u, w) \leftrightarrow M(w, u))$.
(8) $\forall x(M(w, x) \vee M(x, u))$.
(9) $\forall x \exists y M(x, y)$.
(10) $\exists x M(w, x)$.
(11) $\forall x \exists y M(y, x)$.

Soluzione. (1). $\mathfrak{A}_0, \nu_0 \vDash \varphi$ perché la consequente in φ è sempre vera. $\mathfrak{A}_0 \nvDash \varphi$; si consideri $\nu(u) = 5$ e $\nu(w) = 5$; si valuti in $x = 5$. $\nvDash \varphi$ perché $\mathfrak{A}_0, \nu_0 \vDash \varphi$.

(2). $\mathfrak{A}_0, \nu_0 \vDash \varphi$: si valuti $x = 3$. $\mathfrak{A}_0 \vDash \varphi$: si valuti $x = 3$. $\nvDash \varphi$: $A = \{*\}$ e $M^A = \varnothing$. □

Esercizio 2. Mostrare che le seguenti formule sono soddisfacibili e non logicamente valide.

(1) $(\forall x \exists y R(x, y)) \to \exists y R(y, y)$.
(2) $P(u) \vee \neg P(v)$.
(3) $\forall x(R(x, u) \vee \neg R(u, x))$.
(4) $(\exists x \exists y R(x, y)) \to \exists y R(y, y)$.
(5) $\exists x(R(u, x) \vee \neg R(v, x))$.
(6) $\exists x(R(a, x) \vee R(b, x))$.
(7) $(\exists x P(x) \leftrightarrow \exists x Q(x)) \to (\exists x(P(x) \leftrightarrow Q(x)))$.
(8) $(\exists x(P(x) \to Q(x))) \to ((\exists x P(x)) \to (\exists x Q(x)))$.

Date: 1 dicembre 2022.

Soluzione. (1). Soddisfacibile: $A = \{*\}$, $R = \{(*, *)\}$.

Non logicamente valido: Si consideri $\mathbb{N}$ e la relazione $<$. Soluzione alternativa: Sia $A = \{a, b\}$, e $R^A = \{(a, b), (b, a)\}$.

(2). Soddisfacibile: $A = \{*\}$. $P = \{*\}$.

Non logicamente valido: Sia $A = \{a, b\}$. $P = \{b\}$. $\nu(u) = a$, $\nu(v) = b$.

(3).

Non logicamente valido: $A = \{a, b\}$. $R^A = \{(a, b)\}$. $\nu(u) = a$. Per vedere che è falsa, si prenda $x = b$.

□

Esercizio 3. Nelle seguenti domande si consideri come linguaggio il linguaggio dei gruppi.

(1) $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}) = \mathrm{Th}(\mathbb{Z})$? (Consideriamo $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z}$ come gruppi additivi.)
(2) $S_\mathbb{N} \in \mathrm{ModTh}(\{\text{gruppi ciclici}\})$? ($S_\mathbb{N}$ è il gruppo di permutazioni su $\mathbb{N}$.)
(3) Esiste un gruppo G tale che $\mathrm{Th}(G) = \mathrm{Th}(\{\text{gruppi}\})$?
(4) (Questo è un po' più tecnico di teoria dei gruppi) $\mathbb{Z} \in \mathrm{Th}(\{\text{ gruppi ciclici finiti }\})$?
(5) (Questo è un po' più tecnico di teoria dei gruppi) $\mathrm{Th}(\{\text{gruppi abeliani finiti}\}) = \mathrm{Th}(\{\text{gruppi ciclici finiti}\})$?

Soluzione. (1) No. Si consideri $\forall x \exists y (x = y^2)$.
(2) No. $S_\mathbb{N}$ non è abeliano, cioè non soddisfa $\forall x \forall y (xy = yx)$.
(3) No. Per qualsiasi gruppo G, uno dei seguenti due enunciati sta in $\mathrm{Th}(G)$:
   (a) $\forall x \forall y (x = y)$.
   (b) $\neg(\forall x \forall y (x = y))$.

   Però nessuno dei due enunciati sta in $\mathrm{Th}(\{\text{gruppi}\}$. (In sostanza: Per ogni gruppo G, $\mathrm{Th}(G)$ è completa, ma $\mathrm{Th}(\{\text{gruppi}\}$ non è completa.)

□

Esercizio 4. Mostrare che, per i gruppi, la proprietà di essere ciclico non è esprimibile al prim'ordine.

Soluzione. Ogni gruppo ciclico ha cardinalità al più numerabile. $\mathbb{Z}$ è un gruppo ciclico di cardinalità numerabile. Se la ciclicità fosse esprimibile al prim'ordine, per Löwenheim-Skolem eisterebbe un gruppo ciclico di ogni cardinalità infinita, il che sarebbe un assurdo. □

Esercizio 5. Mostra che le seguenti classi <u>non</u> sono assiomatizzabili al prim'ordine:

(1) gruppi finiti;
(2) gruppi di torsione (cioè $\forall x\ \exists n \in \mathbb{N} : x^n = 1$);
(3) grafi connessi.

Nota che in (2) e (3) si utilizzano delle formule con variabili libere.

Soluzione. (1). Per il lemma 4.75 ("Se un insieme di enunciati Γ ha modelli finit di cardinalità arbitraria, allora Γ ha un modello infinito.) Supponiamo per assurdo che la classe dei gruppi finiti sia assomatizzabile al primo'ordine.

Allora esiste un insieme di formule chiuse T tale che i modelli di T sono esattamente i gruppi finiti.

Consideriamo le seguenti formule.

$$\varphi_2 \coloneqq \exists x_1 \exists x_2 : x_1 \neq x_2$$

$$\varphi_3 \coloneqq \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 : x_1 \neq x_2, x_1 \neq x_3, x_2 \neq x_3$$

$$\vdots$$
$$\varphi_n \coloneqq \exists x_1, \dots, \exists x_n : \bigwedge_{1\le i<j\le n} x_i \neq x_j$$
$$\vdots$$

Sia $T' = T \cup \{\varphi_2, \varphi_3, \dots\}$.

T' è finitamente soddisfacibile (considero il modello $\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$ per n appropriato.) Per il teorema di compattezza, poichè abbiamo supposto che T è una teoria al prim'ordine, T' è soddisfacibile. Ma ciò è assurdo, perchè un modello di T' dev'essere per forza sia finito (perché contiene T) che infinito (poiché contiene $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots\}$).

(2). Consideriamo le seguenti formule (con x variabile libera).

$$\varphi_1 \coloneqq x \neq 1;$$
$$\varphi_2 \coloneqq x^2 \neq 1;$$
$$\varphi_3 \coloneqq x^3 \neq 1$$
$$\vdots$$

Supponiamo per assurdo che esiste un'assiomatizzazione T al prim'ordine dei gruppi di torsione.

Poniamo $T' \coloneqq T \cup \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots\}$.

T' è finitamente soddisfacibile (si consideri $\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$). Perciò, per il teorema di compattezza, è soddisfacibile. (cioè esiste una struttura ed un'interpretazione ν tale che...)

(3). $\varphi_n \coloneqq$ la distanza da x a y è almeno n (cioè non esistono cammini da x a y di lunghezza meno di n). Ovvero:

$$\neg(\exists x_1 \dots \exists_{n-2}(\bigwedge_{1\le i<j\le n} x_i \neq x_j) \wedge R(x, x_1) \wedge R(x_1, x_2) \wedge \cdots \wedge R(x_{n-3}, x_{n-2}) \wedge R(x_{n-2}, y)).$$

Supponiamo per assurdo... (si procede come prima) $\square$

Note: per dimostrare la non assiomatizzabilità al prim'ordine di una certa properietà P, si utilizza spesso il teorema di compattezza; si scrive "non P" come una congiunzione di infiniti assiomi $\{\varphi_i\}_i$ al prim'ordine tali che ogni sottoinsieme finito di $\{\varphi_i\}_i$ non contraddice P (ma la loro congiunzione sì)...

Esercizio 6. Mostrare che la classe dei gruppi privi di torsione non è finitamente assiomatizzabile.

Soluzione. Per $n \geq 1$, sia $\varphi_n \coloneqq \forall x((x \neq 1) \to (x^n \neq 1))$. Sia $\Sigma \coloneqq \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$. Sia $S \subseteq \Sigma$ finito, e mostriamo che $\mathrm{Mod}(S) \neq \mathrm{Mod}(\Sigma)$. Esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $S \subseteq \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$.

Sia p primo, $p > n$. $C_p \in \mathrm{Mod}S \setminus \mathrm{Mod}(\Sigma)$.

Per Lemma 4.78, $\mathrm{Mod}\Sigma$ non è finitamente assiomatizzabile. $\square$