TUTORATO LOGICA MATEMATICA
A.A. 2022/2023

ESERCIZI 2022.12.13

Esercizio 1. In questo esercizio, per “grafo” intendiamo “grafo orientato”, cioè i lati hanno una direzione. Mostrare che la classe dei grafi aciclici (cioè senza alcun ciclo) è assiomatizzabile al prim’ordine ma non è finitamente assiomatizzabile al prim’ordine.

Follow up question: la classe con i grafi con almeno un ciclo è assiomatizzabile? (Per questo si può utilizzare il Lemma 4.79, insieme al fatto che i grafi aciclici non sono finitamente assiomatizzabili.)

Follow up question: mostrare che la classe dei grafi con almeno un ciclo non è assiomatizzabile utilizzando direttamente il teorema di compattezza, senza utilizzare il Lemma 4.79.

Soluzione. Ricordiamo che, per il Lemma 4.78, se una classe di strutture è finitamente assiomatizzabile, allora da ogni sua assiomatizzazione possiamo estrarne una finita.

Ricordiamo che la classe dei grafi è assiomatizzata al prim’ordine da

$$\forall x\,\forall y\ (R(x,y) \to R(y,z)).$$

La classe dei grafi aciclici è assiomatizzata dall’insieme Σ che contiene, per ogni $n = 1, 2, \dots,$

$$\varphi_n \coloneqq \text{non esiste un ciclo di lungezza } n,$$

cioè

$$\neg(\exists x_1 \dots \exists x_n (R(x_1,x_2) \wedge R(x_2,x_3) \wedge \cdots \wedge R(x_{n-1},x_n) \wedge R(x_n,x_1))).$$

Mostriamo che da Σ non si può estrarre alcuna assiomatizzazione finita dei grafi aciclici. Sia $S \subseteq \Sigma$. Allora Sia $\Sigma \coloneqq \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$. Sia $S \subseteq \Sigma$ finito, e mostriamo che $\mathrm{Mod}(S) \neq \mathrm{Mod}(\Sigma)$. Esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $S \subseteq \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Sia D un ciclo lungo $n+1$. $D \in \mathrm{Mod}S \setminus \mathrm{Mod}(\Sigma)$.

Per Lemma 4.78, $\mathrm{Mod}\Sigma$ non è finitamente assiomatizzabile. □

Esercizio 2. Utilizzando le regole della deduzione naturale, produrre derivazioni per il seguente fatto.

$$\exists x(P \to R(x)) \vdash P \to \exists x R(x).$$

Soluzione.

$$\mathrm{I}{\to}_1\,\dfrac{\mathrm{E}\exists_2\,\dfrac{\exists x(P \to R(x)) \qquad \mathrm{I}\exists\,\dfrac{\mathrm{E}{\to}\,\dfrac{[P]^1 \qquad [P \to R(x)]^2}{R(x)}}{\exists x R(x)}}{\exists x R(x)}}{P \to \exists x R(x)}$$

□

Date: 18 gennaio 2023.

Esercizio 3. Utilizzando le regole della deduzione naturale, produrre derivazioni per il seguente fatto.

$$\vdash (\exists x \forall y A(x,y)) \to (\forall y \exists x A(x,y))$$

Soluzione.

$$\mathrm{I}{\to}_1 \dfrac{\mathrm{E}\exists_2 \dfrac{[\exists x \forall y A(x,y)]^1 \qquad \mathrm{I}\forall \dfrac{\mathrm{I}\exists \dfrac{\mathrm{E}\forall \dfrac{[\forall y A(x,y)]^2}{A(x,y)}}{\exists x A(x,y)}}{\forall y \exists x A(x,y)}}{\forall y \exists x A(x,y)}}{(\exists x \forall y A(x,y)) \to (\forall y \exists x A(x,y))}$$

$\square$