TUTORATO LOGICA MATEMATICA
A.A. 2022/2023

ESERCIZI 2022.12.14

Esercizio 1. Sia P un insieme finito. Si stabilisca il numero di elementi dell'algebra di Lindenbaum-Tarski $\mathrm{LT}_\emptyset(P)$ in funzione del numero di elementi di P.

Follow up question: È vero che, per ogni algebra di Boole A finita, esiste un insieme P tale che $A \cong \mathrm{LT}_\emptyset(P)$?

Soluzione. Sia $P = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Date φ e ψ formule nelle variabili $x_1, \ldots, x_n$, le seguenti sono equivalenti. $\mathrm{LT}_\emptyset(P)$ è il quoziente $\mathrm{Form}(P)/\equiv$, dove $\equiv$ è l'equivalenza logica (cioè $\varphi \equiv \psi$ se e solo se per ogni valutazione $\nu\colon \mathrm{Form} \to \{0,1\}$ ho $\nu(\varphi) = \nu(\psi)$). Dati φ e ψ formule nelle variabili $x_1, \ldots, x_n$, la condizione $[\varphi] = [\psi]$ è equivalente a $\varphi \equiv \psi$, che è equivalente al fatto che le tavole di verità $f_\varphi\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ e $f_\psi\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ coincidono. Perciò, ho una funzione iniettiva H da $\mathrm{Form}(P)/\equiv$ all'insieme di funzioni da $\{0,1\}^n$ a $\{0,1\}$, che manda φ nella tavola di verità f_φ di φ (si veda la discussione dopo Definizione 2.17). Per il teorema di completezza funzionale, per ogni funzione $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ esiste una formula proposizionale φ tale che $f = f_\varphi$. Perciò, H è suriettiva. Perciò $|\mathrm{LT}_\emptyset| = |\{0,1\}^{\{0,1\}^n}| = 2^{2^n}$. $\square$

==

Ulteriori esercizi:

Esercizio 2. In questo esercizio, per "grafo" intendiamo "grafo non orientato", cioè i lati non hanno una direzione. Mostra che la classe dei grafi connessi <u>non</u> è assiomatizzabile al prim'ordine:

Soluzione. Siano x e y variabili. Per ogni $n = 1, 2, \ldots$, si consideri la formula

$\varphi_n :=$ la distanza da x a y è almeno n (cioè non esistono cammini da x a y di lunghezza meno di n).

Ovvero:

$$\neg(\exists x_1 \ldots \exists_{n-2}(\bigwedge_{1 \le i < j \le n} x_i \neq x_j) \wedge R(x, x_1) \wedge R(x_1, x_2) \wedge \cdots \wedge R(x_{n-3}, x_{n-2}) \wedge R(x_{n-2}, y)).$$

Supponiamo per assurdo che esista un'assiomatizzazione T al prim'ordine dei grafi connessi.

Poniamo $T' := T \cup \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots\}$.

T' è finitamente soddisfacibile. Infatti, sia S un sottoinsieme finito di T'. Allora esiste n tale che $S \subseteq T \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Per mostrare che S è soddisfacibile è abbastanza mostrare che $T \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ è soddisfacibile. In effetti, $T \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ è soddisfatta da una catena di lunghezza n e una valutazione delle variabili che manda x nel primo estremo e y nell'ultimo estremo.

Quindi, $T' := T \cup \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots\}$ è finitamente soddisfacibile. Perciò, per il teorema di compattezza, T' è soddisfacibile. Questo vuol dire che esiste una struttura A e una interpretazione ν delle variabili in A. Poiché ogni φ_n è valida in A sotto l'interpretazione ν, non esistono cammini da $\nu(x)$ a $\nu(v)$ Cioò contraddice il fatto che A è un modello di T, cioè che A è un grafo connesso. $\square$

Date: 18 gennaio 2023.

Esercizio 3. Mostrare che la classe degli insiemi ben ordinati non è assiomatizzabile al prim'ordine. (Insieme ben ordinato := insieme totalmente ordinato ogni sottoinsieme non vuoto del quale ha minimo.)

Suggerimento: si mostri che esiste un'ultrapotenza di un insieme ben ordinato che non è ben ordinato.

Soluzione. Utilizziamo il fatto: le classi assiomatizzabili al prim'ordine sono chiuse per

Basta mostrare che esiste un'ultrapotenza di $\mathbb{N}$ che non è ben ordinata. Sia U un ultrafiltro non principale di $\mathbb{N}$, ovvero un ultrafiltro che estende il filtro dei cofiniti. (Un tale ultrafiltro esiste). Considera l'ultraprotenza $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}/\mathcal{U}$. e poni, per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$a_j = (\underbrace{0, \dots, 0}_{j \text{ volte}}, 1, 2, 3, 4, \dots)$$

Claim: $\{[a_j] \mid j \in \mathbb{N}\}$ non ha minimo in $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}/\mathcal{U}$.

Per mostrare il claim, basta mostrare che $[a_0] \geq [a_1] \geq [a_2] \geq [a_3] \geq \dots$, e che $[a_0] \neq [a_1] \neq [a_2] \neq \dots$.

Mostriamo $[a_n] \geq [a_{n+1}]$: bisogna mostrare che l'insieme di indici in cui $a_n \geq a_{n+1}$ appartiene all'ultrafiltro. L'insieme degli indici è $\mathbb{N}$, che appartiene ad ogni ultrafiltro su $\mathbb{N}$. Inoltre, $[a_n] \neq [a_{n+1}]$ poiché a_n e a_{n+1} sono uguali solo su un numero finito di indici. L'insieme di tali indici non appartiene all'ultrafiltro. □

Esercizio 4. Mostrare (usando gli ultraprodotti) che la classe dei gruppi finiti non è assiomatizzabile al prim'ordine.

Soluzione. Trovare un ultrapodotto infinito di gruppi finiti. Sia C_n un gruppo ciclico di ordine n, generato da g_n. Considera $(\prod_{n\in\mathbb{N}} C_n)/\mathcal{F}$, con $\mathcal{F}$ ultrafiltro che estende i cofiniti. Considera gli elementi

$$\begin{gathered} t_1 := [(g_1^1, g_2^1, g_3^1, g_4^1, \dots)], \\ t_2 := [(g_1^2, g_2^2, g_3^2, g_4^2, \dots)] \\ t_3 := [(g_1^3, g_2^3, g_3^3, g_4^3, \dots)] \\ \vdots \end{gathered}$$

□

Esercizio 5. Trovare un insieme di variabili P e un insieme di formule proposizionali le cui variabili appartengono a P tali che $|\mathrm{LT}_\Gamma(P)| = 8$.

Esercizio 6. Si stabilisca il numero di elementi di un insieme X tale che $|\mathcal{P}(X)| = 4$. Si stabilisca il numero di elementi di un insieme P tale che $|\mathrm{LT}_\emptyset(P)| = 4$.

Esercizio 7. Si mostri che, per ogni algebra di Boole B, esistono un'algebra libera A e un omomorfismo suriettivo $f\colon A \to B$.

Follow up question: Mostrare che ogni algebra di Boole è isomorfa a $\mathrm{LT}_\Gamma(P)$ per qualche P e Γ. (Qui è ammesso prendere Γ incoerente per ottenere l'algebra di Boole di un solo elemento.)

Soluzione. Si consideri l'algebra di Boole $\mathrm{Free}(B)$ libera su B. □

Esercizio 8. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro di un'algebra di Lindenbaum $\mathrm{LT}_\emptyset(P)$. Si mostri che, per tutte le formule φ, ψ nelle variabili proposizionali in P,

(1) $[\neg\varphi] \in \mathcal{U}$ se e solo se $[\varphi] \notin \mathcal{U}$.
(2) $[\varphi \wedge \psi] \in \mathcal{U}$ se e solo se $[\varphi] \in \mathcal{U}$ e $[\psi] \in \mathcal{U}$.

(3) Se $[\varphi], [\varphi \to \psi] \in \mathcal{U}$ allora $[\psi] \in \mathcal{U}$.

Esercizio 9. Qual è l'algebra libera generata dall'insieme vuoto?

Esercizio 10. Sia A l'algebra di Boole degenere (cioè A è un singoletto). Mostrare che non esiste alcun sottoinsieme X di A tale che A è liberamente generata da X.

Esercizio 11. Trovare un insieme di variabili P e un insieme di formule proposizionali Γ con variabili in P tale che $|\mathrm{LT}_\Gamma(P)| = 8$.

Esercizio 12. Sia X un insieme (di variabili proposizionali). Mostrare che i seguenti insiemi sono in biezione.

(1) $\{Y \mid Y \subseteq X\}$.
(2) $\{\Sigma \mid \Sigma$ insieme massimalmente coerente di formule proposizionali con variabili in $X\}$.
(3) $\{\mathcal{U} \mid \mathcal{U}$ ultrafiltro di $\mathrm{LT}_\varnothing(X)\}$.

Esercizio 13. Si mostri che ogni filtro è l'intersezione dei filtri massimali che lo estendono.

Soluzione. Sia A un'algebra di Boole. Sia F un filtro di A. Sia Ult l'insieme dei filtri massimali (equivalentemente, gli ultrafiltri) di A. Mostriamo che $F = \bigcap_{U \in \mathrm{Ult}} U$. L'inclusione $F \subseteq \bigcap_{U \in \mathrm{Ult}} U$ è immediata. Mostriamo l'inclusione $\bigcap_{U \in \mathrm{Ult}} U \subseteq F$. Dobbiamo mostrare che, per ogni $c \in A$, se $c \in \bigcap_{U \in \mathrm{Ult}} U$ allora $c \in F$. Equivalentemente (prendendo la contronominale), dobbiamo mostrare che, per ogni $c \in A$, se $c \notin F$ allora $c \notin \bigcap_{U \in \mathrm{Ult}} U$. Sia $c \in A$ con $c \notin F$. Allora, per il Corollario 3.84, esiste $U_0 \in \mathrm{Ult}$ che estende F ma non contiene c. Allora $c \notin \bigcap_{U \in \mathrm{Ult}} U$. □

Esercizio 14. Sia A un'algebra di Boole. Si mostri che sono equivalenti.

(1) Esiste un omomorfismo da A in $\{0, 1\}$.
(2) A non è un singoletto.

Soluzione. (1) $\Rightarrow$ (2). $f(0_A) = 0 \neq 1 = f(1_A)$; perciò $0_A \neq 1_A$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Il filtro $\{1\}$ è filtro proprio. Perciò esiste un ultrafiltro U che estende $\{1\}$. Allora abbiamo $A \to A/\mathcal{U} \to \{0, 1\}$. (Usiamo Lemma 3.79.) □

Esercizio 15. (Esercizio 2.65, p. 39) Dimostrare che, se Σ è un insieme di formule massimalmente coerente, allora per ogni coppia di formule φ, ψ vale che $\varphi \to \psi \in \Sigma$ sse $\varphi \notin \Sigma$ o $\psi \in \Sigma$.

Soluzione. Ricordiamo che un insieme di formule Σ è massimalmente coerente se è coerente (cioè $\Sigma \nvdash \bot$) e $\sigma \cup \{\varphi\}$ è incoerente per ogni $\varphi \notin \Sigma$.

[$\Rightarrow$] Supponiamo $\varphi \to \psi \in \Sigma$. Mostriamo che $\varphi \notin \Sigma$ o $\psi \in \Sigma$. Cioè dobbiamo mostrare che se $\varphi \in \Sigma$, allora $\psi \in \Sigma$. Supponiamo $\varphi \in \Sigma$. Poichè $\varphi \in \Sigma$ e $\varphi \to \psi \in \Sigma$, allora $\Sigma \vdash \psi$ e quindi (Prop. 2.64) $\psi \in \Sigma$.

[$\Leftarrow$]. Supponiamo $\varphi \notin \sigma$ o $\psi \in \Sigma$.

(1) Caso $\varphi \notin \Sigma$. Allora $\neg\varphi \in \Sigma$ (Prop. 2.64). Allora $\Sigma \vdash (\varphi \to \psi)$. Allora $\varphi \to \psi \in \Sigma$.
(2) Caso $\psi \in \Sigma$. Allora $\Sigma \vdash (\varphi \to \psi)$. Allora $\varphi \to \psi \in \Sigma$.

□

Esercizio 16. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro di un'algebra di Lindenbaum $\mathrm{LT}_\emptyset(P)$. Si mostri che, per tutte le formule φ, ψ nelle variabili proposizionali in P,

(1) $[\neg\varphi] \in \mathcal{U}$ se e solo se $[\varphi] \notin \mathcal{U}$.
(2) $[\varphi \wedge \psi] \in \mathcal{U}$ se e solo se $[\varphi] \in \mathcal{U}$ e $[\psi] \in \mathcal{U}$.
(3) Se $[\varphi], [\varphi \to \psi] \in \mathcal{U}$ allora $[\psi] \in \mathcal{U}$.

Soluzione. (1). Per definizione, abbiamo $[\neg\varphi] = \neg[\varphi]$. Poichè $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro, si ha $[\varphi] \in \mathcal{U}$ oppure $\neg[\varphi] \in \mathcal{U}$, ma non entrambi. □

Esercizio 17. Mostrare che vale $\varphi \wedge \psi \vdash \sigma$ se e solo se $\varphi \vdash \psi \to \sigma$.

Esercizio 18. Siano x e y variabili distinte.
(1) $\neg([x] \wedge [y]) = \neg[x] \vee \neg[y]$ in $\mathrm{LT}_\emptyset(\{x, y\})$?
(2) $[x] \wedge [y] = [x]$ in $\mathrm{LT}_\emptyset(\{x, y\})$?
(3) $[x] \wedge [y] = [x]$ in $\mathrm{LT}_{\{x \to y\}}(\{x, y\})$?
(4) $[x] \to [y] = [y] \to [x]$ in $\mathrm{LT}_{\{x \vee y\}}(\{x, y\})$?

Soluzione. (1) Sì. $\neg([x] \wedge [y]) = [\neg(x \wedge y)]$. $\neg[x] \vee \neg[y] = [\neg x \vee \neg y]$. Poiché $\neg(x \wedge y) \equiv \neg x \vee \neg y$, abbiamo $[\neg(x \wedge y)] = [\neg x \vee \neg y]$.
(2) No. Basta mostrare che $x \wedge y \not\equiv x$. Per far ciò, si noti che una òa prima è falsa e la seconda è vera sotto l'interpretazione $x \mapsto 1$ e $y \mapsto 0$.
(3) Sì. Basta mostrare che, per ogni valutazione che rende vera $x \to y$, $x \wedge y$ è resa vera se e solo se resa x è vera.
(4) No. Si consideri la valutazione $x \mapsto 0$, $y \mapsto 1$.

□