2023-04-07

PROSSIME LEZIONI: VENERDÌ 14 APRILE – AULA P17
" 21 " – ONLINE
28 " – AULA P20
5 MAGGIO – P17
12 " – P17
~~19 " – NO LEZIONE~~
26 " – P17
~~2 GIUGNO – NO LEZIONE (FESTA)~~
9 " – ONLINE
16 " – P17

ESERCIZIO

Trovare il rango
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(rango = la dimensione della più grande sottomatrice quadrata con determinante non nullo.)

SOLUZ.
$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$1 \neq 0 \rightsquigarrow$ rango è almeno 1

guardo gli orlati 2x2

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 4 - 4 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 1\cdot 2 - 2\cdot 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

rango ≥ 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

$$(1\cdot 4\cdot 0 + 2\cdot 1\cdot 0 + 0\cdot 2\cdot 0) - (0\cdot 4\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot 1 + 0\cdot 2\cdot 2) =$$

$$= 0+0+0 - (0+1+0) =$$

$$= -1 \neq 0$$

Ho trovato una ~~...~~ sottomatrice 3×3 con det $\neq 0$.

Non ci sono sottomatrici più grandi;

$\Rightarrow$ il rango è 3.

ESERC.

Rango $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Posso cancellare righe o colonne nulle: il rango resta uguale.

il rango è lo stesso di

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|cc} 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 2 & -2 \end{array}$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \cancel{0} + 2 \cdot (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot 2(-2) - \left(\cancel{2 \cdot 0 \cdot -1} + (-2)(-1) \cdot \cancel{0 + 0 \cdot 2} \right) =$$

$$= -4 + 4 = 0$$

rango della matrice < 3.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot 0 - 2 \cdot 2 = -4 \neq 0.$$

rango $= 2$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\uparrow$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

Per il Teorema degli orlati, dato che gli orlati 3×3 di $\underline{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}$ hanno tutti $\det = 0$, il rango è 2.

$$\begin{pmatrix} 0 & p & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Se ho una matrice A e ho una sottomatrice B di dimensione 2 (cioè B è 2×2) con determinante diverso 0.

So che il rango è ≥ 2.

Per capire se il rango è 2 oppure >2, guardo gli orlati di B.

Se trovo un orlato con det $\neq 0$, il rango è ≥ 3.

Se non trovo nessun orlato con det $\neq 0$ (cioè se ogni $\underbrace{\text{orlato } 3\times 3}_{\text{sottom. } 3\times 3 \text{ che estende } B}$ ha det $= 0$)

allora deduco che il rango è 2 (per il Teorema degli orlati)

TEOREMA degli ORLATI:

Sia M un minore di ordine p non nullo di $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Se tutti i minori di ordine $p+1$ che orlano M sono nulli, allora il rango di A è p.

$$rg \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{1}^{B} & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}}_{A} ?$$

$$1 \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 1$$

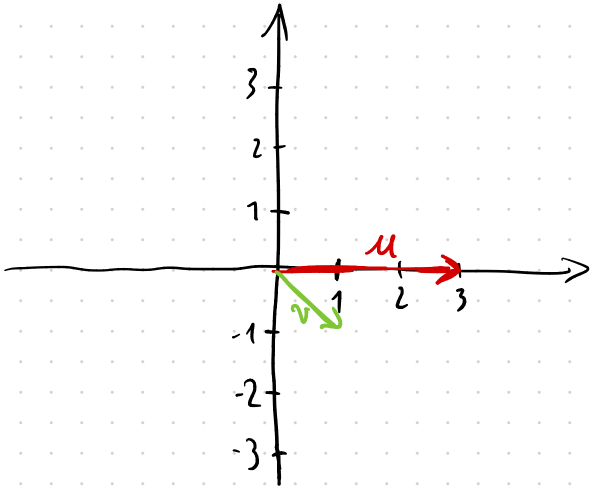
Orlati di B:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 0 \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = 0 \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 0 \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = 0$$

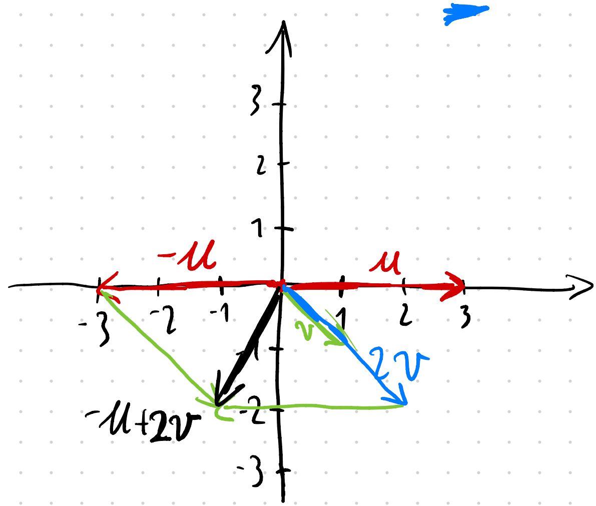
$\det(B) \neq 0$

tutti i suoi orlati 2×2 hanno $\det = 0$.

Perciò il rango è 1.



Disegnare il vettore $-u+2v$



SOLUZ. ALTERNATIVA

$u = (3, 0)$

$v = (1, -1)$

$$-u + 2v = -(3,0) + 2\,(1,-1) =$$

$$= (-3, -0) + (2 \cdot 1, 2 \cdot (-1)) =$$

$$= (-3, 0) + (2, -2) = (-3+2, 0+(-2)) = (-1, -2)$$

ES. Rappresentare graficamente, in $\mathbb{R}^2$, una coppia di vettori linearmente dipendenti e una coppia di vettori lin. indip.

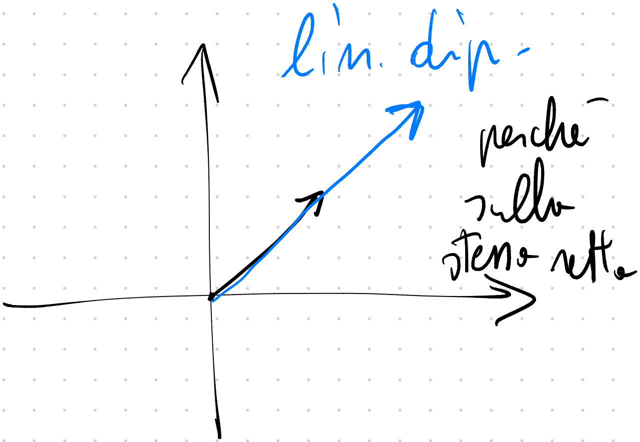
RICORDA:
dei vettori $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ sono lin. dip. se esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ non tutti nulli t.c. $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = \underline{0}$.

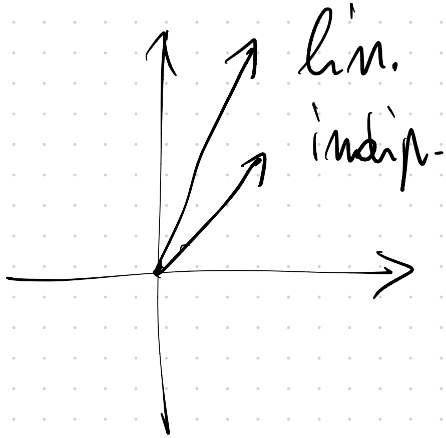
Cioè se il vettore nullo può essere scritto come comb. lineare a scalari non tutti nulli.

Altrimenti si dicono lin. indip.

Dei vettori sono lin. dip. se e solo se almeno uno di questi è comb. lineare degli altri.

2 vettori nel piano sono lin. dip. se e solo se sono su una stessa retta.



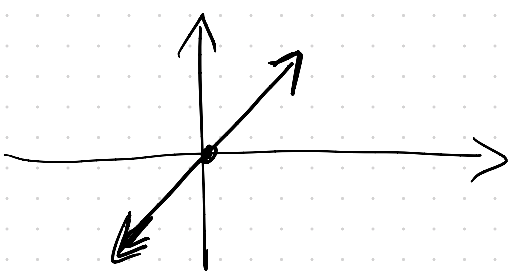


3 vettori sono lin. dip. quando stanno sullo stesso piano.

ES. Vero o falso?

1) Se la somma di due vettori è il vettore nullo, allora sono lin. dipendenti.

SOLUZ.



Chiamiamo $\underline{u}$ e $\underline{v}$ i due vettori.

Sappiamo che $\underline{u} + \underline{v} = \underline{0}$

$\underline{u} = 1 \cdot \underline{u}$

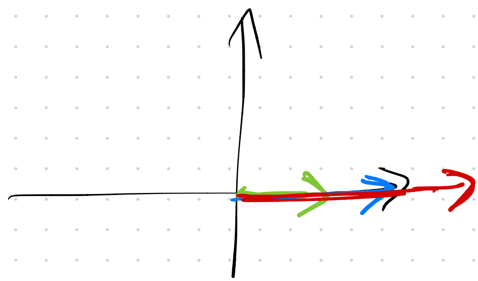
$\underline{v} = 1 \cdot \underline{u}$

$$\underset{\overset{\|}{\alpha_1}}{1} \cdot \underline{u} + \underset{\overset{\|}{\alpha_2}}{1} \cdot \underline{v} = \underline{0}$$

$\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono lin. dip. perché ho scritto il $\underline{0}$ come loro comb. lineare a coeff. non tutti nulli

$\hookrightarrow \underset{\overset{\|}{1}}{\alpha_1}, \underset{\overset{\|}{1}}{\alpha_2}$

2) (Vero o falso?) Se due vettori sono lin. dipendenti, la loro somma è il vettore nullo.



FALSO: ad esempio

$\underline{u}=(1,0)$ e $\underline{v}=(2,0)$ sono lin. dip.

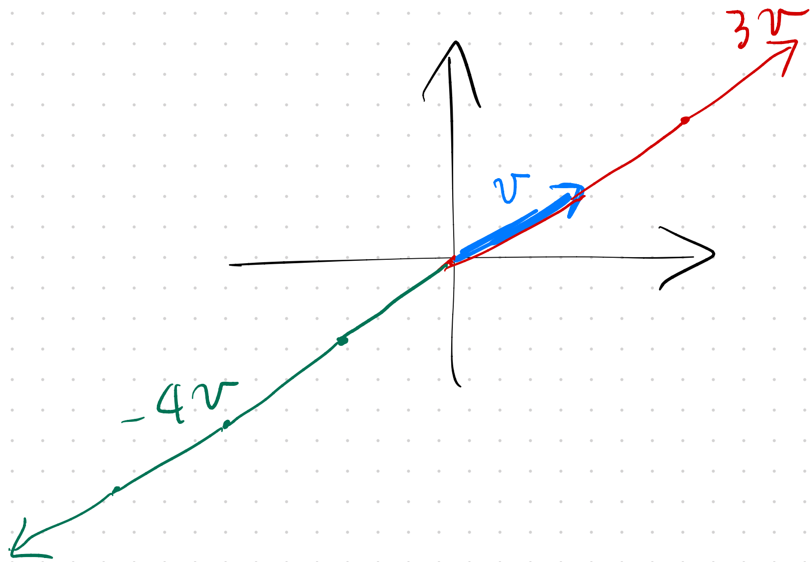
perché $\underline{u}$ e $\underline{v}$ stanno sulla stessa retta $\left(\begin{matrix}\text{MOTIVAZ. ALTERNAT.} \\ 2\underline{u}-1\underline{v}=\underline{0}\end{matrix}\right)$

$(\underline{v}=2\underline{u})$

ma la loro somma è

$(1,0)+(2,0)=(3,0)\neq(0,0)$

ESERC. Vero o falso:
vettori $3v$ e $-4v$ sono lin. dipendenti



SOLUZ. VERO.

$$-4\underline{v} = \frac{-4}{3}(3v)$$

$-4v$ è comb. lineare di $3v$

$\Rightarrow$ $-4v$ e $3v$ sono lin. dip.

SOLUZ. ALTERNATIVA:

$$?(-4v) + ?(3v) = \underline{0}$$

$$0(-4v) + 0\cdot(3v) = \underline{0}$$

$$\underbrace{3(-4v)}_{-12v} + \underbrace{4(3v)}_{12v} = \underline{0}$$

$$\parallel$$

$$0v$$

ho scritto il vett. nullo come comb. lineare di $-4v, 3v$ a coeff. non tutti nulli

$$ab + cb =$$

$$(a+c)b$$

$$-12v + 12v$$

$$= (-12+12)v = 0\cdot v$$

$\Rightarrow$ $-4v$ e $3v$ sono lin. dip.

DA ESAME 07-04-2021:

Stabilire il num. di soluz. del sistema lineare con Rouché-Capelli.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & -6 & -4 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{b}}$$

$$\begin{cases} 2x + 0y - 2z = 2 \\ -x - 6y - 4z = 1 \\ 0 \cdot x - 2y - z = 1 \end{cases}$$

ROUCHÉ-CAPELLI:

$rg(A) = rg(A|\underline{b}) = $ num. incognite $\rightsquigarrow$ 1 SOL.

$rg(A) = rg(A|\underline{b}) \neq$ num. incognite $\rightsquigarrow$ ∞ SOL.

$rg(A) \neq rg(A|\underline{b})$ $\rightsquigarrow$ 0 SOLUZ.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & -6 & -4 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{b}}$$

$rg(A)$

$$\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & -6 & -4 & -1 & -6 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -2 \end{array}$$

$$\det(A) = 2\cdot(-6)\cdot(-1) + 0 + (-2)(-1)(-2) -$$

$$- \left(0 + (-2)(-4)2 + 0\right) =$$

$$= 12 - 4 - 16 = -8 \neq 0$$

$$\Rightarrow rg(A) = 3$$

$$\mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$\mathrm{rg}(A|\underline{b}) \geq \mathrm{rg}(A) = 3$

$\mathrm{rg}(A|\underline{b}) \geq 3$

$\mathrm{rg}(A|\underline{b}) = 3$ perché non può essere di più perché $A|\underline{b}$ ha 3 righe.

$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|\underline{b}) = 3 =$ num. incognite

$\Rightarrow$ 1 soluzione.

$\uparrow$

con il Teorema di Rouché-Capelli

SOLUZ. CON METODO DI CRAMER

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & -6 & -4 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{b}}$$

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -6 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{2\cdot(-6)\cdot(-1) + (-2)\cdot 1(-2) - \left(2\cdot(-4)(-2) + (1)(-6)(-2)\right)}{-8} =$$

$$= \frac{\cancel{12} + 4 - (16 + \cancel{12})}{-8} =$$

$$= \frac{-\cancel{12}^{\,3}}{-\cancel{8}_{\,2}} = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{\det A} = \frac{\cancel{6}^{\,3}}{\cancel{-8}_{\,4}} = -\frac{3}{4}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$2\cdot 1\cdot(-1) + 2\cdot(-4)\cdot 0 + (-2)(-1)\cdot 1 -$$

$$-\left(0 + 1\cdot(-4)\cdot 2 + (-1)(-1)\cdot 2\right) =$$

$$= -2 + 0 + 2 - (-8 + 2) =$$

$$= 0 - (-6) = 6$$

$$z = \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -6 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}}{\det A} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$$

UNICA SOLUZ.:

$$\boxed{x = \frac{3}{2},\ y = -\frac{3}{4},\ z = \frac{1}{2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -6 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) =$$

qui a Tutorato avevo fatto un errore
Ora è corretto

$$= -12 + 4 - (-4) = -4$$

CONTROLLO!

$$\cancel{0x} - 2y - z = 1$$

$$-\cancel{2}\left(-\frac{3}{\cancel{4}_2}\right) - \left(+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 0$$